ThS. LÊ HOÀNH PHÒ
Nhà giáo ưu tú

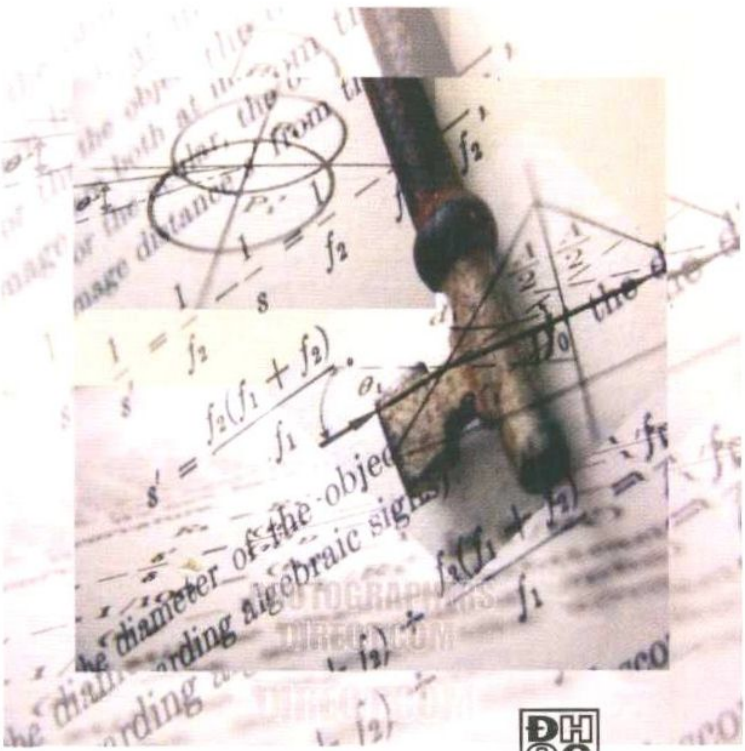
MỚI

BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN

ĐẠI SỐ ☆☆

10

- Dành cho HS lớp 10 ôn tập & nâng cao kĩ năng làm bài.
- Biên soạn theo chương trình cơ bản & nâng cao mới.
- Chuẩn bị cho các kì thi quốc gia do Bộ GD&ĐT tổ chức.



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ThS. LÊ HOÀNH PHÒ
Nhà giáo ưu tú

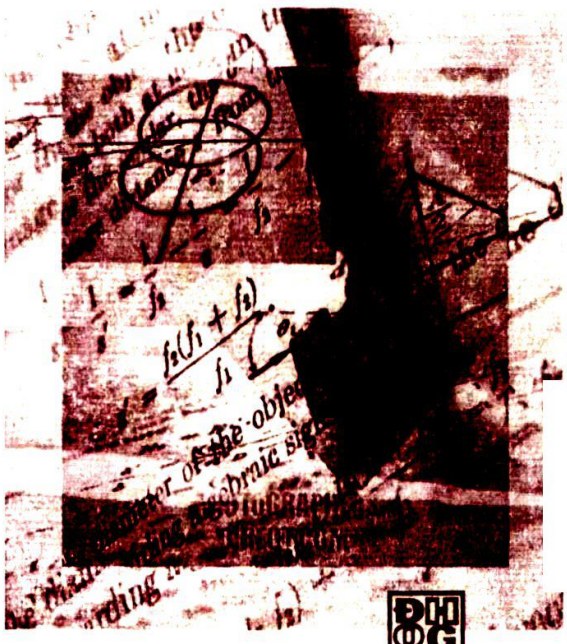
MỚI

BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN

ĐẠI SỐ ☆☆

- Dành cho HS lớp 10 ôn tập & nâng cao kĩ năng làm bài.
- Biên soạn theo chương trình cơ bản & nâng cao mới.
- Chuẩn bị cho các kì thi quốc gia do Bộ GD&ĐT tổ chức.

10



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Để giúp cho học sinh lớp 10 có thêm tài liệu tự bồi dưỡng, nâng cao và rèn luyện kĩ năng giải toán theo chương trình phân ban mới. Trung tâm sách giáo dục ANPHA xin trân trọng giới thiệu quý bạn đồng nghiệp và các em học sinh cuốn: "Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Đại số 10" này.

Cuốn sách này nằm trong bộ sách 6 cuốn gồm:

- *Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Hình học 10.*
- *Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Đại số 10.*
- *Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Hình học 11.*
- *Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Đại số - Giải tích 11.*
- *Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Hình học 12.*
- *Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Giải tích 12.*

do nhà giáo ưu tú, Thạc sĩ Lê Hoành Phò tổ chức biên soạn. Nội dung sách được biên soạn theo chương trình phân ban: cơ bản và nâng cao mới của bộ GD & ĐT, trong đó một số vấn đề được mở rộng với các dạng bài tập hay và khó để phục vụ cho các em yêu thích muốn nâng cao toán học, có điều kiện phát triển tốt nhất khả năng của mình. Cuốn sách là sự kế thừa những hiểu biết chuyên môn và kinh nghiệm giảng dạy của chính tác giả trong quá trình trực tiếp đứng lớp bồi dưỡng cho học sinh giỏi các lớp chuyên toán.

Với nội dung súc tích, tác giả đã cố gắng sắp xếp, chọn lọc các bài toán tiêu biểu cho từng thể loại khác nhau ứng với nội dung của SGK. Một số bài tập có thể khó nhưng cách giải được dựa trên nền tảng kiến thức và kĩ năng cơ bản. Học sinh cần tự mình hoàn thiện các kĩ năng cũng như phát triển tư duy qua việc giải bài tập có trong sách trước khi đối chiếu với lời giải có trong sách này, có thể một số lời giải có trong sách còn cô đọng, học sinh có thể tự mình làm rõ hơn, chi tiết hơn, cũng như tự mình đưa ra những cách lập luận mới hơn.

Chúng tôi hy vọng bộ sách này sẽ là một tài liệu thiết thực, bổ ích cho người dạy và học, đặc biệt các em học sinh yêu thích môn toán và học sinh chuẩn bị cho các kỳ thi quốc gia do bộ GD & ĐT tổ chức sắp tới.

Trong quá trình biên soạn, cuốn sách này không thể tránh khỏi những thiếu sót, chúng tôi rất mong nhận được góp ý của bạn đọc gần xa để bộ sách hoàn thiện hơn trong lần tái bản.

Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ:

- **Trung tâm sách giáo dục Anpha**
  225C Nguyễn Tri Phương, P.9, Q.5, Tp. HCM.
- **Công ti sách - thiết bị giáo dục Anpha**
  50 Nguyễn Văn Săng, Q. Tân Phú, Tp. HCM.
  ĐT: 08. 62676463, 38547464 .
  Email: alphabookcenter@yahoo.com

Xin chân thành cảm ơn!

Tác giả.

MỤC LỤC

Chương 4: Bất đẳng thức – bất phương trình

§1. Bất đẳng thức 5
Dạng 1: Phương pháp biến đổi tương đương 6
Dạng 2: Phương pháp so sánh, sai phân 11
Dạng 3: Phương pháp dùng bất đẳng thức Côsi 15
Dạng 4: Phương pháp khác 21
Dạng 5: Giá trị lớn nhất – nhỏ nhất 26
§2. Bất phương trình – Nhị thức bậc nhất 38
Dạng 1: Giải bất phương trình 38
Dạng 2: Bất phương trình bậc nhất 41
Dạng 3: Hệ bất phương trình bậc nhất 46
Dạng 4: Dấu nhị thức bậc nhất 49
§3. Bất phương trình - Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn 63
Dạng 1: Bất phương trình bậc nhất hai ẩn 63
Dạng 2: Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn 65
§4. Bất phương trình – Tam thức bậc hai 73
Dạng 1: Dấu tam thức bậc hai 74
Dạng 2: Bất phương trình bậc hai 80
Dạng 3: Hệ bất phương trình bậc hai 88
Dạng 4: Dấu tam thức trên một miền 94
§5. Một số phương trình – Bất phương trình quy về bậc hai 106
Dạng 1: Phương trình, bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối 106
Dạng 2: Phương trình, bất phương trình chứa căn thức 116
Dạng 3: Hệ phương trình 126

Chương 5: Thống kê

§1. Một vài khái niệm mở đầu 138
§2. Trình bày mẫu số liệu 140
§3. Các số đặc trưng của mẫu số liệu 148

Chương 6: Góc lượng giác và công thức lượng giác

§1. Góc và cung lượng giác 156
Dạng 1: Đơn vị và độ dài cung 156
Dạng 2: Cung góc lượng giác 158
§2. Giá trị lượng giác 164
Dạng 1: Giá trị lượng giác 165
Dạng 2: Chứng minh hệ thức 171
Dạng 3: Góc cung liên quan đặc biệt 176
§3. Công thức lượng giác 183
Dạng 1: Tính giá trị 184
Dạng 2: Chứng minh hệ thức và biến đổi 191
§4. Ứng dụng lượng giác 209
Dạng 1. Bài toán tam giác 209
Dạng 2: Ứng dụng vào đại số 227

ABC

§1. BẤT ĐẲNG THỨC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

• Một số tính chất của bất đẳng thức

$A > B \Leftrightarrow A - B > 0$; $A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0$

$a > b$ và $b > c \Rightarrow a > c$; $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$

$a + c > b \Leftrightarrow a > b - c$

Nếu $c > 0$ thì $a > b \Leftrightarrow ac > bc$. Nếu $c < 0$ thì $a > b \Leftrightarrow ac < bc$

$$\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d \; ; \; \begin{cases} a > b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a - c > b - d$$

$$\begin{cases} a > b \geq 0 \\ c > d \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a.c > b.d$$

$a > b \geq 0 \Rightarrow a^n > b^n$ với mọi $n \in \mathbf{N}^*$: $a > b > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$

$a > b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$; $a > b \Rightarrow \sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$

• Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối

$\forall a,\ a \leq |a|$; $\forall a > 0$, $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$; $|x| > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -a \\ x > a \end{array}\right.$

$|a + b| \leq |a| + |b|$ với mọi a, b. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow ab \geq 0$.

$|a - b| \geq ||a| - |b||$ với mọi a, b.

• Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân (Côsi)

$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ với mọi a, b không âm.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

$\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ với mọi a, b, c không âm.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Chú ý:

1) Chứng minh bất đẳng thức là một bài toán khó, nói chung có rất nhiều phương pháp tuỳ thuộc dạng của bài toán, đặc trưng của đề bài. Để chứng minh một bất đẳng thức, có khi ta phải phối hợp nhiều cách khác nhau để giải quyết bài toán.
2) Một bất đẳng thức có thể có nhiều cách khai thác và cách chứng minh khác nhau.
3) Ứng dụng bất đẳng thức để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất thì lưu ý dấu bằng phải xảy ra trong điều kiện xác định.

B. PHÂN DẠNG TOÁN

DẠNG 1: PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

Dùng các tính chất cơ bản của bất đẳng thức để biến đổi tương đương bất đẳng thức cần chứng minh về một bất đẳng thức đúng.

Có hai dạng: Bất đẳng thức đúng hiển nhiên và bất đẳng thức đúng theo giả thiết của đề bài cho, chẳng hạn:

$A^2 \geq 0$, $A^2 + B^2 \geq 0$, $A^2 + B^2 + C^2 \geq 0$

A. $M^2 \geq 0$, trong đó từ giả thiết thì có $A \geq 0$

A. $M^2 + B.N^2 \geq 0$ trong đó giả thiết thì có $A \geq 0$, $B \geq 0$

$A.B.C \geq 0$ trong đó giả thiết thì có $A \geq 0$, $B \geq 0$, $C \geq 0$...

Ví dụ 1: Chứng minh bất đẳng thức:

a) $|a + b| \leq |a| + |b|$ b) $|a - b| \leq |a| + |b|$

c) $|a| - |b| \leq |a + b|$.

Giải

a) Vì 2 vế không âm nên ta có:

$|a + b| \leq |a| + |b| \Leftrightarrow (a + b)^2 \leq (|a| + |b|)^2$

$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + 2|ab| + b^2 \Leftrightarrow ab \leq |ab|$: Đúng

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow ab \geq 0$.

b) Ngoài cách chứng minh trực tiếp bằng bình phương tương đương, ta có thể sử dụng câu a) bằng cach thay b bởi –b:

$|a - b| \leq |a| + |-b| \Rightarrow |a - b| \leq |a| + |b|$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow ab \leq 0$.

c) Áp dụng câu a)

$|a| = |(a + b) + (-b)| \leq |a + b| + |-b| = |a + b| + |b|$

$\Rightarrow |a| - |b| \leq |a + b|$

Ví dụ 2: Cho a, b, c ≥ 0. Chứng minh bất đẳng thức Côsi:

a) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ b) $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$

Giải

a) Vì a, b ≥ 0 nên BĐT $\Leftrightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow (a + b)^2 \geq 4ab$

$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq (a - b)^2 \geq 0$: Đúng

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

b) Xét a + b + c = 0, vì a, b, c ≥ 0 nên a = b = c = 0: BĐT đúng

Xét a + b + c > 0. Áp dụng câu a):

$$(a+b)+(c+\frac{a+b+c}{3}) \geq 2\sqrt{ab}+2\sqrt{c.\frac{a+b+c}{3}}$$

$$\Rightarrow 4\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \geq 2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{c.\frac{a+b+c}{3}}\right) \geq 4\sqrt{\sqrt{ab}.\sqrt{c.\frac{a+b+c}{3}}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4 \geq abc\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \Rightarrow \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc$$

$\Rightarrow \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Cách khác: Đặt $A = \sqrt[3]{a}$, $B = \sqrt[3]{b}$, $C = \sqrt[3]{c}$ thì bất đẳng thức tương đương:

$\frac{1}{2}(A+B+C)\left[(A-B)^2+(B-C)^2+(C-A)^2\right] \geq 0$.

Ví dụ 3: Chứng minh với mọi số a, b, c, d:

a) $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ b) $|ac + bd| \leq \sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{c^2 + d^2}$.

Giải

a) BĐT $\Leftrightarrow a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 \leq a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$

$\Leftrightarrow a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 \geq 0 \Leftrightarrow (ad - bc)^2 \geq 0$: đúng

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow ad = bc$

b) BĐT $\Leftrightarrow (ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$: Đúng theo câu a).

Chú ý: 2 bất đẳng thức này thường dùng để giải toán.

Ví dụ 4: Chứng minh với mọi số a, b:

a) $a^2 + ab + b^2 \geq 0$ b) $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$

Giải

a) $a^2 + ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(a+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$ (đúng)

b) $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3 \Leftrightarrow a^4 - a^3b + b^4 - ab^3 \geq 0$

$\Leftrightarrow a^3(a - b) - b^3(a - b) \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)(a^3 - b^3) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 (a^2 + ab + b^2) \geq 0$ (đúng).

Ví dụ 5: Cho $a \geq 0$, $b \geq 0$. Chứng minh:

a) $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$ b) $\frac{a+b}{2}.\frac{a^2+b^2}{2} \leq \frac{a^3+b^3}{2}$

Giải

a) Ta có: $a^3 + b^3 \geq ab(a + b) \Leftrightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a + b) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a + b)(a^2 - 2ab + b^2) \geq 0 \Leftrightarrow (a + b)(a - b)^2 \geq 0$: đúng vì $a, b \geq 0$

Dấu đẳng thức xảy ra: $\Leftrightarrow a + b = 0$ hoặc $a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$

b) $\frac{a+b}{2}.\frac{a^2+b^2}{2} \leq \frac{a^3+b^3}{2} \Leftrightarrow a^3 + ab^2 + a^2b + b^3 \leq 2a^3 + 2b^3$

$\Leftrightarrow a^3 - ab^2 - a^2b + b^3 \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)(a^2 - b^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)^2(a + b) \geq 0$: Đúng vì $a, b \geq 0$.

Chú ý: chỉ cần điều kiện tổng $a + b \geq 0$.

Ví dụ 6: Chứng minh bất đẳng thức

a) $|a + b| < |1 + ab|$, với $|a| < 1$, $|b| < 1$

b) $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, với $a > 0$, $b > 0$

Giải

a) Vì hai vế của bất đẳng thức cần chứng minh đều không âm nên:

BĐT $\Leftrightarrow (a + b)^2 < (1 + ab)^2$

$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 < 1 + 2ab + a^2b^2 \Leftrightarrow (a^2 - 1)(1 - b^2) < 0$: Đúng

Vì: $|a| < 1, |b| 1 \Rightarrow a^2 < 1$ và $b^2 < 1 \Rightarrow a^2 - 1 < 0, 1 - b^2 > 0$

b) $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3}{\sqrt{a}\sqrt{b}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$\Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})(a + b - \sqrt{ab}) \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b})\sqrt{ab}$

$\Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})(a + b - 2\sqrt{ab}) \geq 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ (đúng).

Ví dụ 7: Chứng minh bất đẳng thức

a) $a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$, với $a \geq 0, b \geq 0$

b) $\frac{a^m - b^m}{a^m + b^m} > \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$, với $a > b > 0, m > n; m, n \in \mathbf{N}$

Giải

a) Vì $a + b \geq 0$ nên $a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab \leq 2(a^2 + b^2) \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$ (đúng).

Chú ý: Bất đẳng thức này thường dùng để giải toán.

b) Vì $a, b > 0$ nên BĐT tương đương

$a^m b^n - a^n b^m > a^n b^m - a^m b^n \Leftrightarrow 2a^n b^n (a^{m-n} - b^{m-n}) > 0$: Đúng

Vì $a > b > 0, m > n; m, n \in \mathbf{N}$

Ví dụ 8: Chứng minh bất đẳng thức:

a) $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$, với $ab \geq 1$

b) $\frac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}$, với $a > 1$

Giải

a) BĐT $\Leftrightarrow \frac{1}{1+a^2} - \frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+b^2} - \frac{1}{1+ab} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{a(b-a)}{(1+a^2)(1+ab)} + \frac{b(a-b)}{(1+b^2)(1+ab)} \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)[(b(1 + a^2) - a(1 + b^2)] \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 (ab - 1) \geq 0$: Đúng vì $ab \geq 1$

b) Vì hai vế bất đẳng thức cần chứng minh đều dương nên:

$\frac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 < (\sqrt{a+1} - \sqrt{a-1})^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{a} < (a + 1) + (a - 1) - 2\sqrt{a^2 - 1} \Leftrightarrow 2\sqrt{a^2 - 1} < 2a - \frac{1}{a}$

$\Leftrightarrow 4(a^2 - 1) < (2a - \frac{1}{a})^2$ (vì $2a \geq 2 > \frac{1}{a}$) $\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{a^2}$: Đúng

Ví dụ 9 Chứng minh với mọi x, y, z:

a) $2xyz \le x^2 + y^2z^2$ b) $x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 14 > 2x + 12y + 6z$

Giải

a) $x^2 + y^2z^2 \ge 2xyz \Leftrightarrow x^2 - 2xyz + y^2z^2 \ge 0 \Leftrightarrow (x - yz)^2 \ge 0$ (đúng).

b) $x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 14 > 2x + 12y + 6z$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 4y^2 - 12y + 3(z^2 - 2z) + 14 > 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (2y - 3)^2 + 3(z - 1)^2 + 1 > 0$ (đúng).

Ví dụ 10: Chứng minh với mọi a, b, c:

a) $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$ b) $(a + b + c)^2 \le 3(a^2 + b^2 + c^2)$

Giải

a) $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \ge 0$

$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \ge 0$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \ge 0$: Đúng.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a - b = b - c = c - a = 0 \Leftrightarrow a = b = c$.

b) $(a + b + c)^2 \le 3(a^2 + b^2 + c^2)$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \le 3(a^2 + b^2 + c^2)$

$\Leftrightarrow 2ab + 2bc + 2ca \le 2(a^2 + b^2 + c^2)$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \ge 0$.

Ví dụ 11: Chứng minh bất đẳng thức:

a) $a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \ge 6abc$ với mọi a, b, c.

b) $\frac{a^2}{3} + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$ với $a > \sqrt[3]{36}$, $abc = 1$

Giải

a) $a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \ge 6abc$

$\Leftrightarrow (a - bc)^2 + (b - ca)^2 + (c - ab)^2 \ge 0$ (đúng)

b) Ta có: $\frac{a^2}{3} + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$

$\Leftrightarrow \frac{a^2}{3} + b^2 + c^2 - ab - bc - ca > 0$

$\Leftrightarrow [\frac{a^2}{4} + (b + c)^2 - a(b + c)] + \frac{a^2}{12} - 3bc > 0$

$\Leftrightarrow (\frac{a}{2} - b - c)^2 + \frac{a^2 - 36bc}{12} > 0$ (do abc = 1)

$\Leftrightarrow (\frac{a}{2} - b - c)^2 + \frac{a^3 - 36}{12a} > 0$: Đúng vì $a > \sqrt[3]{36} \Rightarrow a > 0, a^3 > 36$.

Ví dụ 12: Cho tam giác ABC có cạnh a, b, c tương ứng. Chứng minh:

a) $a^3 + b^3 + c^3 + 2abc < a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b)$

b) $\frac{aA + bB + cC}{a + b + c} \ge \frac{A + B + C}{3}$

Giải

a) BĐT $\Leftrightarrow (a^2b + b^2a - a^3 - b^3) + (a^2c + b^2c - 2abc) + (c^2(a + b) - c^3) > 0$

$\Leftrightarrow (a + b)(2ab - a^2 - b^2) + c(a - b)^2 + c^2(a + b - c) > 0$

$\Leftrightarrow -(a - b)^2 (a + b - c) + c^2(a + b - c) > 0$

$\Leftrightarrow (a + b - c) (c^2 - (a - b)^2 > 0$

$\Leftrightarrow (a + b - c) (c + a - b) (c + b - a) > 0$: Đúng vì a, b,c là các cạnh của tam giác.

b) BĐT $\Leftrightarrow 3(aA + bB + cC) \geq (a + b + c)(A + B + C)$

$\Leftrightarrow (aA + bB - aB - bA) + (bB + cC - bC - cB) + (cC + aA - cA - aC) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)(A - B) + (b - c)(B - C) + (c - a)(C - A) \geq 0$: Đúng vì trong một tam giác góc và cạnh tỉ lệ thuận.

Ví dụ 13: Cho hai số a, b thoả mãn $a + b \geq 2$. Chứng minh $a^3 + b^3 \leq a^4 + b^4$.

Giải

Theo giả thiết thì $a + b - 2 \geq 0$. BĐT $\Leftrightarrow a^4 + b^4 - a^3 - b^3 \geq 0$

Ta chứng minh: $a^4 + b^4 - a^3 - b^3 \geq a + b - 2$

$\Leftrightarrow (a^4 - a^3 - a + 1) + (b^4 - b^3 - b + 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow a^3(a - 1) - (a - 1) + b^3(b - 1) - (b - 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - 1)(a^3 - 1) + (b - 1)(b^3 - 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - 1)^2 (a^2 + a + 1) + (b - 1)^2 (b^2 + b + 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - 1)^2 [(a + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}] + (b - 1)^2 [(b + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}]^2 \geq 0$: Đúng

Ví dụ 14: Cho 5 số a, b, c, d, e tuỳ ý. Chứng minh:

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

Giải

BĐT $\Leftrightarrow 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \geq 4(ab + ac + ad + ae)$

$\Leftrightarrow (a^2 + 4b^2 - 4ab) + (a^2 + 4c^2 - 4ac) + (a^2 + 4d^2 - 4ad) + (a^2 + 4e^2 - 4ae) \geq 0.$

$\Leftrightarrow (a - 2b)^2 + (a - 2c)^2 + (a - 2d)^2 + (a - 2e)^2 \geq 0$: Đúng

Ví dụ 15: Cho x, y dương. Chứng minh: $\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy}$

Giải

BĐT $\Leftrightarrow (1 + xy)[(1 + x)^2 + (1 + y)^2] \geq (1 + x)^2 (1 + y)^2$

$\Leftrightarrow (1 + xy)[2(1 + x + y) + x^2 + y^2] \geq [(1 + x + y) + xy]^2$

$\Leftrightarrow 1 + xy(x^2 + y^2) \geq 2xy + x^2y^2$

$\Leftrightarrow xy(x^2 + y^2 - 2xy) + (x^2y^2 - 2xy + 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow xy(x - y)^2 + (xy - 1)^2 \geq 0$: Đúng vì x, y > 0

Ví dụ 16: Cho $4x - 3y = 15$. Chứng minh $x^2 + y^2 \geq 9$

Giải

Vì $4x - 3y = 15$ nên $y = \frac{4}{3}x - 5$. Do đó:

BĐT $\Leftrightarrow x^2 + (\frac{4}{3}x - 5)^2 \geq 9 \Leftrightarrow x^2 + \frac{16}{9}x^2 - \frac{40}{3}x + 25 \geq 9$

$\Leftrightarrow \frac{25}{9}x^2 - \frac{40}{3}x + 16 \geq 9 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}x - 4\right)^2 \geq 0$: Đúng

ABC

DẠNG 2: PHƯƠNG PHÁP SO SÁNH, SAI PHÂN

- $A > B \Leftrightarrow A - B > 0$; $A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0$
- Cho A, B, C > 0 thì $\frac{A}{B} < \frac{A+C}{B}$; $\frac{A}{B} > \frac{A}{B+C}$

Nếu A > B thì $\frac{A}{B} > 1$, $0 < \frac{B}{A} < 1$

Nếu A > B thì $\frac{A}{C} > \frac{B}{C}$, $\frac{C}{A} < \frac{C}{B}$ ....

- Cho A, B, m > 0

Nếu A > B thì $\frac{A}{B} < \frac{A+m}{B+m}$. Nếu A < B thì $\frac{A}{B} < \frac{A+m}{B+m}$

- Với k nguyên dương thì: $k^2 < k(k+1)$, $k^2 > k(k-1)$

$$\frac{1}{k^2} > \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}; \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \quad (k \geq 2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{2\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$$

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{2\sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$$

Chú ý: Lựa chọn đánh giá tăng giảm tử, mẫu thích hợp theo yêu cầu của đề bài.

Ví dụ 1: Cho a > b. Chứng minh:

a) Nếu ab > 0 thì $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ b) Nếu $a \geq 0$, $b \geq 0$ thì $\sqrt{a} > \sqrt{b}$

Giải

a) Lập hiệu số: $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$

Vì a > b, ab > 0 $\Rightarrow \frac{b-a}{ab} < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

b) Lập hiệu số $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

Vì $a \geq 0$, $b \geq 0$, a > b $\Rightarrow \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} > 0 \Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có cạnh a, b, c. Chứng minh

a) Nửa chu vi lớn hơn độ dài mỗi cạnh.

b) $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$

Giải

a) a, b, c là 3 cạnh tam giác nên a + b > c.

Do đó $p = \frac{a+b+c}{2} > \frac{c+c}{2} = c$. Tương tự p > b, p > a

b) Ta có: $a < b + c \Rightarrow a^2 < (b + c)a \Rightarrow a^2 < ab + ac$

$b < c + a \Rightarrow b^2 < (c + a)b \Rightarrow b^2 < ab + bc$

$c < a + b \Rightarrow c^2 < (a + b)c \Rightarrow c^2 < ac + bc.$

Cộng 3 bất đẳng thức cùng dấu thì được đpcm.

Ví dụ 3: Chứng minh với mọi số nguyên dương n:

a) $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}<1$ b) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}<2$

Giải

a) Ta có: $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k+1-k}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, với mọi $k \geq 1$.

Do đó: $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}$

$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}<1$

b) Ta có: $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$, với mọi $k \geq 2$. Do đó:

$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}<2$

Ví dụ 4: Chứng minh với mọi số nguyên dương n:

a) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n}-1$ b) $\frac{1}{2}.\frac{3}{4}...\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n}}$

Giải

a) Ta có: $\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k}} \leq \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$.

Do đó: $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{1}}+2(\sqrt{2}-\sqrt{1})+...+2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

$= 1 - 2 + 2\sqrt{n} = 2\sqrt{n} - 1$

b) $\frac{2k-1}{2k}=\sqrt{\frac{(2k-1)^2}{(2k)^2}} \leq \sqrt{\frac{(2k-1)^2}{(2k)^2-1}}=\sqrt{\frac{2k-1}{2k+1}}$, do đó:

$\frac{1}{2}.\frac{3}{4}...\frac{2n-1}{2n} \leq \sqrt{\frac{1}{3}}.\sqrt{\frac{3}{5}}...\sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2n}}$

Ví dụ 5: Chứng minh với mọi số nguyên dương n:

a) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{1.3.5}+...+\frac{1}{1.3.5...(2n+1)}<\frac{1}{2}$

ABC

Giải

a) Đặt $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}$

S_n là tổng của n số hạng, trong đó số hạng nhỏ nhất là $\frac{1}{2n}$, các số hạng khác đều lớn hơn $\frac{1}{2n}$. Do đó $S_n \geq \frac{1}{2n}.n = \frac{1}{2}$

b) Ta có: $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.3.5} + ... + \frac{1}{1.3.5...(2n+1)}$

$< \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$< \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + ... + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)} < \frac{1}{2}$

Ví dụ 6: Chứng minh với mọi số nguyên dương n:

a) $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{n^3} < \frac{5}{4}$ b) $\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2$

Giải

a) Sử dụng đánh giá:

$$\frac{1}{k^3} = \frac{k}{k^4} \leq \frac{k}{(k^2 - \frac{1}{4})^2} = \frac{k}{(k-\frac{1}{2})^2(k+\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(k-\frac{1}{2})^2} - \frac{1}{(k+\frac{1}{2})^2}\right),$$

hoặc: $\frac{1}{k^3} = \frac{k}{k.k^2} < \frac{1}{k(k^2-1)} = \frac{1}{k}.\frac{1}{(k+1)(k-1)} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k-1)} - \frac{1}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{k} + \frac{1}{2(k+1)}$$

b) Ta có: $\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k}}{(k+1).k} = \sqrt{k}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sqrt{k}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$

$$= \left(1 + \sqrt{\frac{k}{k+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) < 2\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

Từ đó áp dụng thì có đpcm.

Ví dụ 7: Cho a, b, c > 0. Chứng minh

a) Nếu a > b thì $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$ b) Nếu a < b thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$

Giải

a) Lập hiệu: $\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+c} = \frac{a(b+c) - b(0+c)}{b(b+c)} = \frac{c(a-b)}{b(b+c)}$

Vì a, b, c > 0 và a > b nên $\frac{c(a-b)}{b(b+c)} > 0 \Rightarrow$ đpcm.

b) Chứng minh tương tự

Ví dụ 8: Cho a, b, c, d > 0. Chứng minh:

a) $\frac{a+b}{1+a+b} \le \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$

b) $1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$

Giải

a) Vì a, b dương nên:

$$\frac{a+b}{1+a+b} = \frac{a}{1+a+b} + \frac{b}{1+a+b} \le \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$$

b) Vì a, b, c, dương nên:

$$\frac{a}{a+b+d} < \frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+c} \; ; \frac{b}{a+b+c} < \frac{b}{b+c+d} < \frac{b}{b+d}$$

$$\frac{c}{c+b+d} < \frac{c}{c+d+a} < \frac{c}{c+a} \; ; \frac{d}{a+b+d} < \frac{d}{d+a+b} < \frac{d}{d+b}$$

Cộng 4 bất đẳng thức lại thì có đpcm.

Ví dụ 9: Cho a, b, c thuộc đoạn [–1; 2] và a + b + c ≤ 1

Chứng minh: $a^2 + b^2 + c^2 \le 7$

Giải

Vì $-1 \le a \le 2 \Rightarrow (a + 1)(a - 2) \le 0 \Rightarrow a^2 - a \le 2$

Tương tự: $b^2 - b \le 2$, $c^2 - c \le 2$

Do đó: $a^2 + b^2 + c^2 - (a + b + c) \le 6 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \le 6 + (a + b + c) \le 7$

Ví dụ 10: Cho x, y, z ≥ 0. Chứng minh

$$\sqrt{x^2+xy+y^2} + \sqrt{y^2+yz+z^2} + \sqrt{z^2+zx+x^2} \ge (x+y+z)\sqrt{3}$$

Giải

Với x, y, z ≥ 0, ta có:

$$\sqrt{x^2+xy+y^2} = \sqrt{3\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2} \ge \sqrt{3\left(\frac{x+y}{2}\right)^2} = \frac{x+y}{2}.\sqrt{3}$$

Tương tự: $\sqrt{y^2+yz+z^2} \ge \frac{y+z}{2}.\sqrt{3}$; $\sqrt{z^2+3x+x^2} \ge \frac{z+x}{2}.\sqrt{3}$

Cộng 3 bất đẳng thức thì có:

$$VT \ge \left(\frac{x+y}{2} + \frac{y+z}{2} + \frac{z+x}{2}\right).\sqrt{3} = (x + y + z)\sqrt{3}$$

Ví dụ 11: Chứng minh: $x^6 + x^4 + x^2 + 1 > x^5 + x^3 + x$, với mọi x

Giải

Xét $x \le 0$ thì VT > 1 > 0 > VP

Xét $x \ge 1$ thì $VT - VP = x^5(x - 1) + x^3(x - 1) + x(x - 1) > 0$

Xét $0 < x < 1$ thì $VT - VP = x^6 + x^4(1 - x) + x^2(1 - x) + (1 - x) > 0$

Do đó ta có đpcm.

Ví dụ 12: Cho a, b, c và có abc = 1. Chứng minh:

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\le 1$$

Giải

Ta có: $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$

$= (a + b)[a^2b^2 + a^3(a - b) - b^3 (a - b)]$

$= (a + b)[a^2b^2 + (a - b)(a^3 - b^3))$

$= (a + b) [a^2b^2 + (a - b)^2 (a^2 + ab + b^2)] \ge (a + b)a^2b^2$

Nên: $\frac{ab}{a^5+b^5+ab}\le\frac{ab}{a^2b^2(a+b)+ab}=\frac{1}{ab(a+b)+1}\le\frac{1}{ab(a+b+c)}=\frac{c}{a+b+c}$

Tương tự: $\frac{bc}{b^5+c^5+bc}\le\frac{a}{a+b+c}$, $\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\le\frac{b}{a+b+c}$

Cộng 3 bất đẳng thức thì được đpcm.

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC vuông tại A, cạnh a, b, c. Chứng minh với mọi số nguyên dương n thì $a^{2n} \ge b^{2n} + c^{2n}$

Giải

Ta có: $a > b, a > c \Rightarrow 0 < \frac{b}{a} < 1, 0 < \frac{c}{a} < 1$

và $2n \ge 2$ nên $(\frac{b}{a})^{2n} \le (\frac{b}{a})^2; (\frac{c}{a})^{2n} \le (\frac{c}{a})^2$

$\Rightarrow (\frac{b}{a})^{2n} + (\frac{c}{a})^{2n} \le \frac{b^2+c^2}{a^2} = 1 \Rightarrow b^{2n} + c^{2n} \le a^{2n}.$

DẠNG 3: PHƯƠNG PHÁP DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI

– Cho hai số a và b không âm:

$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$, $a + b \ge 2\sqrt{ab}$, $ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

– Cho ba số a, b và c không âm:

$\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}$; $a + b + c \ge 3.\sqrt[3]{abc}$

$abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$; $\sqrt[3]{abc}\le\frac{a+b+c}{3}$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Chú ý:

1) $a^2 + b^2 \ge 2ab$ với mọi a, b.
2) Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh về dạng có thể áp dụng được bất đẳng thức Côsi với các kỹ thuật tách – gộp, ghép cặp 2, ghép cặp 3, chẳng hạn: $a + 2b = a + b + b$; $a + b = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + b$;

$ab = a\sqrt{b}.\sqrt{b}$; $ab^2 = a.b.b$; $a + 1 = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + 1 = a + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$;...

Ví dụ 1: Cho a, b dương. Chứng minh:

a) $(a + b)(1 + ab) \geq 4ab$ b) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$

Giải

a) Áp dụng BĐT Côsi cho 2 số dương:

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$, $1 + ab \geq 2\sqrt{1.ab}$

Vì 2 vế trái dương nên $(a + b)(1 + ab) \geq 4(\sqrt{ab})^2 = 4ab$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$ và $1 = ab \Leftrightarrow a = b = 1$.

b) Áp dụng BĐT Côsi cho 2 số dương liên tiếp:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \geq \frac{2}{\frac{a+b}{2}} = \frac{4}{a+b}$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

Ví dụ 2: Chứng minh:

a) Với a, b cùng dấu thì $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$ và a, b trái dấu thì: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \leq -2$

b) Nếu $a^2 + b^2 = 1$ thì $|a + b| \leq \sqrt{2}$.

Giải

a) Nếu a, b là hai số cùng dấu thì $\frac{a}{b}$ và $\frac{b}{a}$ là hai số dương nên:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{a}} = 2.$$

Nếu a, b là hai số trái dấu thì $-\frac{a}{b}+\left(-\frac{b}{a}\right) \geq 2$ và vì vậy $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \leq -2$..

b) Vì $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq 2(a^2 + b^2) = 2$ nên $|a + b| \leq \sqrt{2}$.

Ví dụ 3: Chứng minh:

a) $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$, với a, b, c ≥ 0.

b) $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c)$ với a, b, c tuỳ ý.

Giải

a) Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số không âm, ta được:

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$; $b + c \geq 2\sqrt{bc}$; $c + a \geq 2\sqrt{ca}$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên:

$2(a + b + c) \geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})$

hay $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

b) Vì $x^2 + y^2 \geq 2xy$ với mọi x, y nên:

$a^2b^2 + b^2c^2 \geq 2ab^2c$; $b^2c^2 + c^2a^2 \geq 2bc^2a$; $c^2a^2 + a^2b^2 \geq 2ca^2b$

Cộng từ vế ba bất đẳng thức trên, ta được:

$2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 2abc(b + c + a)$

hay $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c)$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Ví dụ 4: Chứng minh với mọi a, b, c:

a) $\frac{a^2+6}{\sqrt{a^2+2}} \geq 4$ b) $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \geq \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$ $(a,b,c \neq 0)$.

Giải

a) $\frac{a^2+6}{\sqrt{a^2+2}} = \frac{a^2+2+4}{\sqrt{a^2+2}} = \sqrt{a^2+2}+\frac{4}{\sqrt{a^2+2}} \geq 2\sqrt{4} = 4$.

b) Ta có: $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b^2}.\frac{b^2}{c^2}} = 2\sqrt{\frac{a^2}{c^2}} = 2\left|\frac{a}{c}\right| \geq 2\frac{a}{c}$.

Tương tự $\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \geq 2\frac{b}{a}$ và $\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2} \geq 2\frac{c}{b}$.

Cộng vế với vế 3 bất đẳng thức, ta được đpcm.

Ví dụ 5: Cho a, b, c dương. Chứng minh:

a) $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$. b) $(a + 1)(b + 1)(a + c)(b + c) \geq 16abc$.

Giải

Áp dụng BĐT cho hai số dương:

a) $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, $b + c \geq \sqrt{bc}$, $c + a \geq 2\sqrt{ca}$

$\Rightarrow (a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$.

b) $(a + 1)(b + 1)(a + c)(b + c) \geq 2\sqrt{a}.2\sqrt{b}.2\sqrt{ac}.2\sqrt{bc} = 16abc$

Ví dụ 6: Cho a, b, c dương. Chứng minh

a) $a + b + c \leq \frac{1}{2}(a^2b + b^2c + c^2a + \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$

b) $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c} \geq 6$

Giải

a) Áp dụng BĐT Côsi cho hai số dương

$a^2b + \frac{1}{b} \geq 2a \Rightarrow a \leq \frac{1}{2}(a^2b + \frac{1}{b})$

Tương tự: $b \leq \frac{1}{2}(b^2c + \frac{1}{c})$; $c \leq \frac{1}{2}(c^2a + \frac{1}{a})$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức này ta được điều phải chứng minh.

b) $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c} = \left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right) \geq 2 + 2 + 2 = 6$

Ví dụ 7: Cho 4 số a, b, c, d dương. Chứng minh:

a) $\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4 \geq abcd$ b) $(a + b + c + d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \geq 16$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC 02666

Giải

a) Áp dụng BĐT Côsi cho hai số dương

$a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $c+d \geq 2\sqrt{cd} \Rightarrow a+b+c+d \geq 2(\sqrt{ab}+\sqrt{cd})$

$$\Rightarrow \left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2 \geq \left(\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\right)^2 = ab+cd+2\sqrt{abcd} \geq 4\sqrt{abcd}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2 \geq \sqrt{abcd} \Rightarrow \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4 \geq abcd$$

b) Áp dụng BĐT Côsi thì có:

$(a+b+c+d)^2 \geq 16\sqrt{abcd}$, $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)^2 \geq \frac{16}{\sqrt{abcd}}$

$$\Rightarrow (a+b+c+d)^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)^2 \geq 16\sqrt{abcd}.\frac{16}{\sqrt{abcd}} = 16^2 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Ví dụ 8: Chứng minh:

a) Nếu $a \geq 1$, $b \geq 1$ thì $a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1} \leq ab$.

b) Nếu x, y, z > 0 thì $3x + 2y + 4z \geq \sqrt{xy}+3\sqrt{yz}+5\sqrt{zx}$

Giải

a) Áp dụng BĐT Côsi cho 2 số không âm:

$$a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1} = a.\sqrt{(b-1).1}+b\sqrt{(a-1).1} \leq a.\left(\frac{b-1+1}{2}\right)+b\left(\frac{a-1+1}{2}\right) = ab$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a - 1 = b - 1 = 1 \Leftrightarrow a = b = 2$

b) $$\sqrt{xy}+3\sqrt{yz}+5\sqrt{zx} \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)+3\left(\frac{y+z}{2}\right)+5\left(\frac{z+x}{2}\right) = 3x + 2y + 4z$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$.

Ví dụ 9: Cho a, b, c dương. Chứng minh:

a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ b) $\frac{a^4}{b}+\frac{b^4}{c}+\frac{c^4}{a} \geq 3abc$

Giải

Áp dụng BĐT Côsi cho 3 số dương:

a) $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} > 0$; $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 3\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}$

Suy ra $(a + b + c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 3\sqrt[3]{abc}.3\frac{1}{\sqrt[3]{abc}} = 9$

Cách khác:

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 1+1+1+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9.$$

b) $\frac{a^4}{b}+\frac{b^4}{c}+\frac{c^4}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^4}{b}.\frac{b^4}{c}.\frac{c^4}{a}} = 3abc$

ABC

Ví dụ 10: Cho 3 số dương x, y, z. Chứng minh:

a) Nếu xyz = 1 thì $\left(\frac{1+x}{2}\right)^n+\left(\frac{1+y}{2}\right)^n+\left(\frac{1+z}{2}\right)^n\ge 3$

b) Nếu x + y + z = 1 thì $\frac{\sqrt{x}}{1-x}+\frac{\sqrt{y}}{1-y}+\frac{\sqrt{z}}{1-z}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Giải

a) $\left(\frac{1+x}{2}\right)^n+\left(\frac{1+y}{2}\right)^n+\left(\frac{1+z}{2}\right)^n\ge\left(\sqrt{x}\right)^n+\left(\sqrt{y}\right)^n+\left(\sqrt{z}\right)^n\ge 3.\sqrt[3]{(\sqrt{xyz})^n}=3$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ x = y = z = 1.

b) $\frac{2}{3}=\frac{2-2x+2x}{3}=\frac{(1-x)+(1-x)+2x}{3}\ge\sqrt[3]{(1-x)^2.2x}$

Suy ra: $(1-x)^2x\le\frac{4}{27}\Rightarrow\sqrt{x}(1-x)\le\frac{2}{3\sqrt{3}}$

Do đó $\frac{\sqrt{x}}{1-x}=\frac{x}{\sqrt{x}(1-x)}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}x$

Tương tự $\frac{\sqrt{y}}{1-y}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}y$; $\frac{\sqrt{z}}{1-z}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}z$

Cộng vế theo vế suy ra đpcm.

Ví dụ 11: Cho a, b, c dương. Chứng minh:

a) $(a+b+c).\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ge\frac{9}{2}$

b) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$

Giải

a) Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương:

$a+b+c=\frac{1}{2}[(a+b)+(b+c)+(c+a)]\ge\frac{3}{2}\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}>0$

và $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{(a+b)(b+c)(c+a)}}>0$

Nhân vế theo vế suy ra đpcm.

b) BĐT $\Leftrightarrow\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow\frac{a+b+c}{b+d}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}\ge\frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ge\frac{9}{2}$

Cách khác: Dùng phép thế x = b + c, y = c + a, z = a + b

Ví dụ 12: Cho a, b, c dương. Chứng minh:

a) $\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{abc}$

b) $\frac{a}{b+c}+\frac{b+c}{a}+\frac{b}{c+a}+\frac{c+a}{b}+\frac{c}{a+b}+\frac{a+b}{c}\ge\frac{15}{2}$

Giải

a) Ta có: $a^3+b^3+abc=(a+b)(a^2+b^2-ab)+abc$

$\ge(a+b)ab+abc=ab(a+b+c)$

Do đó: $\frac{1}{a^3+b^3+abc}\le\frac{1}{ab(a+b+c)}$

Chứng minh tương tự suy ra:

$VT\le\frac{1}{a+b+c}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=\frac{1}{abc}$

b) $2.VT=\left(\frac{2a}{b+c}+\frac{b+c}{2a}\right)+\left(\frac{2b}{c+a}+\frac{c+a}{2b}\right)+\left(\frac{2c}{a+b}+\frac{a+b}{2c}\right)$

$+\frac{3}{2}\left[\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\right]\ge2+2+2+\frac{3}{2}(2+2+2)=15\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 13: Cho a, b, c > 0. Chứng minh:

a) $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\ge2$

b) $\frac{a^3}{a+b}+\frac{b^3}{b+c}+\frac{c^3}{c+a}\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$

Giải

Áp dụng BĐT Côsi cho hai số dương, ta có:

a) $\sqrt{\frac{a}{b+c}}=\frac{a}{\sqrt{(b+c).a}}\ge\frac{a}{\frac{b+c+a}{2}}=\frac{2a}{b+c+a}$

$\sqrt{\frac{a}{c+a}}=\frac{b}{\sqrt{(c+a).b}}\ge\frac{b}{\frac{c+a+b}{2}}=\frac{2b}{c+a+b}$

$\sqrt{\frac{c}{b+a}}=\frac{c}{\sqrt{(b+a).c}}\ge\frac{c}{\frac{b+a+c}{2}}=\frac{2c}{b+a+c}$

Do đó: $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\ge\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2$

b) $\frac{a^3}{a+b}+\frac{a(a+b)}{4}\ge a^2\Rightarrow\frac{a^3}{a+b}\ge\frac{3}{4}a^2-\frac{ab}{4}$

Tương tự: $\frac{b^3}{b+c} \geq \frac{3}{4}b^2 - \frac{bc}{4}$; $\frac{c^3}{c+a} \geq \frac{3}{4}c^2 - \frac{ca}{4}$

Do đó: $VT \geq \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{4}(ab + bc + ca)$

$\geq \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{4}\left(\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2+c^2}{2} + \frac{c^2+a^2}{2}\right) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$.

Ví dụ 14: Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh $8^a + 8^b + 8^c \geq 2^a + 2^b + 2^c$

Giải

Đặt $x = 2^a$, $y = 2^b$, $z = 2^c$ thì $x, y, z > 0$

và $xyz = 2^0 = 1 \Rightarrow x + y + z \geq 3$. Ta có: $x^3 + 1 + 1 \geq 3x \Rightarrow x^3 \geq 3x - 2$

Tương tự: $y^3 \geq 3y - 2$; $z^3 \geq 3z - 2$

Do đó: $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3(x + y + z) - 6$

$= x + y + z + 2(x + y + z - 3) \geq x + y + z$: đpcm.

Ví dụ 15: Cho $a, b, c > 0$ và $abc = 1$. Chứng minh:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Giải

Đặt $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$ thì $x, y, z > 0$ và $xyz = 1 \Rightarrow x + y + z \geq 3$.

BĐT $\Leftrightarrow \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}$

Áp dụng BĐT Côsi cho 2 số dương: $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y+z}{4} \geq x \Rightarrow \frac{x^2}{y+z} \geq x - \frac{y+z}{4}$

Tương tự: $\frac{y^2}{z+x} \geq y - \frac{z+x}{4}$; $\frac{z^2}{x+y} \geq z - \frac{x+y}{4}$

Cộng lại thì $VT \geq \frac{1}{2}(x + y + z) \geq \frac{3}{2}$ (đpcm).

DẠNG 4: PHƯƠNG PHÁP KHÁC

- Xuất phát từ một bất đẳng thức đã biết là đúng, biến đổi suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.
- Dùng BĐT giá trị tuyệt đối: $|x| - |y| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$
- Để so sánh A và B, ngoài cách lập hiệu A – B, ta có giả sử A > B rồi biến đổi tương đương về BĐT, nếu BĐT này đúng thì A > B, còn sai thì ngược lại A ≤ B.
- Đặt ẩn phụ, dồn biến, các phép thế, biến đổi khác để chứng minh phối hợp

Ví dụ 1:Cho a, b, c là 3 cạnh một tam giác. Chứng minh:

$abc \geq (b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)$

Giải

Ta có các bất đẳng thức hiển nhiên:

$a^2 \geq a^2 - (b-c)^2 \Rightarrow a^2 \geq (a-b+c)(a+b-c)$

$b^2 \geq b^2 - (c-a)^2 \Rightarrow b^2 \geq (b-c+a)(b+c-a)$

$c^2 \geq c^2 - (a-b)^2 - c^2 \geq (c-a+b)(c+a-b)$

Vì a, b, c là 3 cạnh tam giác nên $a+b>c$, $b+c>a$, $c+a>b$

Do đó: $a^2b^2c^2 \geq (a-b+c)^2 (b+c-a)^2 (c+a-b)^2$

$\Rightarrow abc \geq (a-b+c)(b+c-a)(c+a-b)$

Cách khác: Dùng BĐT Côsi

Ví dụ 2: Cho $a+b+c=3$. Chứng minh $a^4+b^4+c^4 \geq a^3+b^3+c^3$

Giải

Ta có: $(a-1)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq 2a-1$. Tương tự $b^2 \geq 2b-1$, $c^2 \geq 2c-1$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq 2(a+b+c)-3 = 3$

và $(a^2-1)^2 \geq 0 \Rightarrow a^4 \geq 2a^2-1$. Tương tự $b^4 \geq 2b^2-1$, $c^4 \geq 2c^2-1$

$\Rightarrow a^4+b^4+c^4 \geq 2(a^2+b^2+c^2)-3$

$= a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2+c^2-3) \geq a^2+b^2+c^2$

Do đó: $2(a^4+b^4+c^4) \geq (a^4+b^4+c^4)+(a^2+b^2+c^2)$

$\Rightarrow 2(a^4+b^4+c^4) \geq (a^4+a^2)+(b^4+b^2)+(c^4+c^2)$

$\Rightarrow 2(a^4+b^4+c^4) \geq 2a^3+2b^3+2c^3$

$\Rightarrow a^4+b^4+c^4 \geq a^3+b^3+c^3$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Ví dụ 3: Chứng minh với mọi x, y, z:

a) $|x+y+z| \leq |x| + |y| + |z|$ b) $|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$

Giải

a) $|x+y+z| = |x+(y+z)| \leq |x| + |y+z| \leq |x| + |y| + |z|$

b) $|x-z| = (x-y)+(y-z) \leq |x-y| + |y-z|$

Ví dụ 4: Chứng minh với mọi x:

a) $|x+1| + |x-5| \geq 6$ b) $|x-1| + |x-2| + |x-3| \geq 2$

Giải

a) $|x+1| + |x-5| = |x+1| + |5-x| \geq |(x+1)+(5-x)| = 6$

b) $|x-1| + |x-2| + |x-3| = |x-2| + |x-1| + |3-x|$

$\geq |x-2| + |(x-1)+(3-x)| = |x-2| + 2 \geq 2$

Ví dụ 5: Chứng minh:

a) Nếu $x \geq y > 0$ thì $\dfrac{x}{1+x} \geq \dfrac{y}{1+y}$

b) $\dfrac{|a-b|}{1+|a-b|} \leq \dfrac{|a|}{1+|a|} + \dfrac{|b|}{1+|b|}$, với mọi a, b

Giải

a) Với $x \geq y \geq 0$, ta có:

$\dfrac{x}{1+x} \geq \dfrac{y}{1+y} \Leftrightarrow x(1+y) \geq y(1+x) \Leftrightarrow x+xy \geq y+xy \Leftrightarrow x \geq y$ (đúng)

b) Vì $|a-b| \le |a| + |b|$ nên theo câu a) ta có:

$$\frac{a-b}{1+a-b} \le \frac{|a|+b}{1+a+|b|} = \frac{a}{1+|a|+b} + \frac{|b|}{1+a+|b|} \le \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

Ví dụ 6: Không dùng máy tính, so sánh

a) $\sqrt{2000} + \sqrt{2005}$ và $\sqrt{2002} + \sqrt{2003}$

b) $\sqrt{a+2} + \sqrt{a+4}$ và $\sqrt{a} + \sqrt{a+6}$ với $a > 0$

Giải

a) Giả sử $\sqrt{2000} + \sqrt{2005} < \sqrt{2002} + \sqrt{2003}$

$\Leftrightarrow (\sqrt{2000} + \sqrt{2005})^2 < (\sqrt{2002} + \sqrt{2003})^2$

$\Leftrightarrow 2000+2005 + 2\sqrt{2000.2005} < 2002+2003 + 2\sqrt{2002.2003}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2000.2005} < \sqrt{2002.2003}$

$\Leftrightarrow 2000.2005 < 2002.2003 \Leftrightarrow 4\,010\,000 < 4\,010\,006$: Đúng

Vậy: $\sqrt{2000} + \sqrt{2005} < \sqrt{2002} + \sqrt{2003}$.

b) Giả sử $\sqrt{a+2} + \sqrt{a+4} \le \sqrt{a} + \sqrt{a+6}$

$\Leftrightarrow (\sqrt{a+2} + \sqrt{a+4})^2 \le (\sqrt{a} + \sqrt{a+6})^2$

$\Leftrightarrow a+2+a+4+2\sqrt{a+2} + \sqrt{a+4} \le a+a+6+2\sqrt{a(a+6)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a+2)(a+4)} \le \sqrt{a(a+6)}$

$\Leftrightarrow (a+2)(a+4) \le a(a+6) \Leftrightarrow a^2 + 6a + 8 \le a^2 + 6a \Leftrightarrow 8 \le 0$: Sai

Vậy $\sqrt{a+2} + \sqrt{a+4} > \sqrt{a} + \sqrt{a+6}$ $(a > 0)$

Ví dụ 7: Không dùng máy tính, so sánh:

a) $\sqrt{15} - \sqrt{14}$ và $\sqrt{14} - \sqrt{13}$

b) $\sqrt{n} + \sqrt{n+m}$ và $\sqrt{n+1} + \sqrt{n+m-1}$ (n, m nguyên dương).

Giải

a) $\sqrt{15} - \sqrt{14} = \dfrac{1}{\sqrt{15} + \sqrt{14}} < \dfrac{1}{\sqrt{14} - \sqrt{13}} = \sqrt{14} - \sqrt{13}$

b) Vì n, m nguyên dương nên:

Vì $\sqrt{n} + \sqrt{n+m} > 0$; $\sqrt{n+1} + \sqrt{n+m-1} > 0$. Ta có:

$(\sqrt{n} + \sqrt{n+m})^2 = 2n + m + 2\sqrt{n^2+nm}$

$(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+m-1})^2 = 2n+m+2\sqrt{n^2+nm+(m-1)})$

Vì $\sqrt{n^2+nm} \le \sqrt{n^2+nm+(m-1)}$

suy ra: $\sqrt{n} + \sqrt{n+m} \le \sqrt{n+1} + \sqrt{n+m-1}$

Ví dụ 8: Giả sử $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$, với b, d dương. Chứng minh: $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d}$.

Giải

Vì $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{ad-bc}{bd} < 0$, và b, d > 0 nên ad – bc < 0

Do đó: $\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{b(b+d)} > 0$ và $\frac{a+c}{b+d} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{d(b+d)} < 0.$

Vậy: $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

Ví dụ 9: Cho x, y, z dương và x(x + y + z) = 3yz. Chứng minh:

$$(x + y)^3 + (x + z)^3 + 3(x + y)(y + z)(z + x) \le 5(y + z)^3$$

Giải

Đặt a = x + y, b = y + z, c =z + x thì a, b, c > 0

x(x + y + z) = 3yz $\Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 - ab$. Ta có:

$$c^2 = a^2 + b^2 - ab = (a + b)^2 - 3ab \ge (a + b)^2 - \frac{3}{4}(a + b)^2 = \frac{1}{4}(a + b)^2$$

nên a + b < 2c và $c^2 > ab$

BĐT $\Leftrightarrow a^3 + b^3 + 3abc \le 5c^3 \Leftrightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2) + 3abc \le 5c^3$

$\Leftrightarrow (a + b)c^2 + 3abc \le 5c^3 \Leftrightarrow (a + b)c + 3ab \le 5c^2$

$\Leftrightarrow c(a + b - 2c) + 3(ab - c^2) \le 0$: Đúng.

Ví dụ 10: Cho a, b, c là 3 cạnh tam giác. Chứng minh:

$$\frac{a}{2b+2c-a} + \frac{b}{2c+2a-b} + \frac{c}{2a+2b-c} \ge 1$$

Giải

Đặt x = 2b + 2c – a, y = 2c + 2a – b, z = 2a + 2b – c $\Rightarrow$ x, y, z > 0

$a = \frac{1}{9}(2y + 2z - x)$, $b = \frac{1}{9}(2z + 2x - y)$, $c = \frac{1}{9}(2x + 2y - z)$

Thế vào, biến đổi và nhóm lại thì được:

$$VT = \frac{2}{9}\left[\left(\frac{x}{y}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\right] - \frac{1}{3} \ge \frac{2}{9}(2+2+2) - \frac{1}{3} = \frac{12}{9} - \frac{1}{3} = 1$$

Ví dụ 11: Cho a + b ≥ 0. Chứng minh:

$$(a + b)(a^2 + b^2)(a^3 + b^3) \le 4(a^6 + b^6)$$

Giải

Ta có: $a^2 + b^2 \ge 2ab \Rightarrow a^2 - ab + b^2 \ge ab$

$\Rightarrow (a + b)(a^2 - ab + b) \ge ab(a + b) \Rightarrow a^3 + b^3 \ge ab(a + b)$

$\Rightarrow 2(a^3 + b^3) \ge a^3 + b^3 + ab(a + b) \Rightarrow 2(a^3 + b^3) \ge (a + b)(a^2 + b^2)$

Mà $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)\left(\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}\right) \ge 0$

Do đó: $2(a^3 + b^3)^2 \ge (a + b)(a^2 + b^2)(a^3 + b^3)$

và $2(a^3 + b^3)^2 \le 2(1^2 + 1^2)(a^6 + b^6) = 4(a^6 + b^6)$

Nên: $(a + b)(a^2 + b^2)(a^3 + b^3) \le 4(a^6 + b^6)$.

Cách khác: Dùng ví dụ 5b) Dạng 1.

Ví dụ 12: Cho x, y, z $\in$ [0; 2]. Chứng minh rằng: $2(x + y + z) - (xy + yz + zx) \le 4$

Giải

Ta có: x, y, z $\in$ [0; 2] $\Rightarrow 2 - x, 2 - y, 2 - z \ge 0$

$\Rightarrow (2 - x)(2 - y)(2 - z) \ge 0$

$\Rightarrow 8 - 4(x + y + z) + 2(xy + yz + zx) - xyz \ge 0$

$\Rightarrow 4(x + y + z) - 2(xy + yz + zx) \le 8 - xyz \le 8$

$\Rightarrow 2(x + y + z) - (xy + yz + zx) \le 4$

Dấu bằng xảy ra khi x, y, z có 2 số bằng 0; 1 số bằng 2.

Ví dụ 13: Cho $u \le v$. Chứng minh rằng: $u^3 - 3u \le v^3 - 3v + 4$

Giải

Ta có: $u^3 - 3u \le v^3 - 3v + 4$

$\Leftrightarrow u^3 - 3u - 2 \le v^3 - 3v + 2 \Leftrightarrow (u + 1)^2 (u - 2) \le (v - 1)^2 (v + 2)$

$\Leftrightarrow (u + 1)^2 [(u + 1) - 3] \le (v - 1)^2 [(v - 1) + 3]$

$\Leftrightarrow (u + 1)^3 - 3(u + 1)^2 \le (v - 1)^3 + 3(v - 1)^2$

Đặt $x = u + 1$, $y = v - 1$ thì:

BĐT $\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 \le y^3 + 3y^2 \Leftrightarrow x^3 - y^3 \le 3(x^2 + y^2)$

Ta có: $x - y = (u - v) + 2 \le 2$

$\Rightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2) \le 2(x^2 + xy + y^2) = 2(x^2 + y^2) + 2xy$

$\le 2(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2) = 3(x^2 + y^2) \Rightarrow x^3 - y^3 \le 3(x^2 + y^2)$: đpcm

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow u = -1$ và $v = 1$

Ví dụ 14: Cho ba số thực x, y, z thoả mãn $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ xy + yz + zx = 8 \end{cases}$

Chứng minh rằng: $1 \le x, y, z \le \frac{7}{3}$

Giải

Ta có: $\begin{cases} y + z = 5 - x \\ yz = 8 - x(y + z) = 8 - x(5 - x) = x^2 - 5x + 8 \end{cases}$

Do đó y và z là 2 nghiệm của phương trình:

$X^2 - (5 - x)X + (x^2 - 5x + 8) = 0$

$\Rightarrow \Delta = (5 - x)^2 - 4(x^2 - 5x + 8) = -3x^2 + 10x - 7 \ge 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 10x + 7 \le 0 \Rightarrow 1 \le x \le \frac{7}{3}$

Chứng minh tương tự ta có: $1 \le y, z \le \frac{7}{3}$.

Ví dụ 15: Cho ba số thực x, y, z thoả mãn: $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ y^2 + yz + z^2 = 16 \end{cases}$

Chứng minh rằng $-8 \le xy + yz + zx \le 8$.

Giải

Áp dụng ví dụ 3 dạng 1, từ hệ ta có:

$48 = (x^2 + y^2 + xy)(y^2 + z^2 + yz)$

$$= \left[\left(\frac{x}{2}+y\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}.x\right)^2\right]\left[\left(y+\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}.z\right)^2\right]$$

$$\geq \left[\left(\frac{x}{2}+y\right).\left(\frac{\sqrt{3}}{2}.z\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}.x\right).\left(y+\frac{z}{2}\right)\right]^2$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{4}xz + \frac{\sqrt{3}}{2}yz + \frac{\sqrt{3}}{2}xy + \frac{\sqrt{3}}{4}xz\right)^2 = \frac{3}{4}(xy + yz + zx)^2$$

Do đó $\frac{3}{4}(xy + yz + zx)^2 \leq 48 \Rightarrow (xy + yz + zx)^2 \leq 64$

Vậy: $-8 \leq xy + yz + zx \leq 8$.

DẠNG 5: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – NHỎ NHẤT

• Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Xét hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D. Ta định nghĩa

M là giá trị lớn nhất của hàm số: $y = f(x)$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_o \in D, f(x_o) = M \end{cases}$

m là giá trị nhỏ nhất của hàm số:$y = f(x)$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_o \in D, f(x_o) = m \end{cases}$

Tổng quát $A = f(x_1, x_2,..., x_n)$ là biểu thức phụ thuộc vào n biến $x_1, x_2,..., x_n$ trong đó $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2,..., x_n \in X_n$

Nếu $\begin{cases} A \geq m, \forall x_1 \in X_1, \forall x_2 \in X_2,..., \forall x_n \in X_n \\ \exists x_1^o \in X_1, \exists x_2^o \in X_2, \exists x_n^o \in X_n \text{ sao cho } f(x_1^o, x_2^o,..., x_n^o) = m \end{cases}$

thì m được gọi là giá trị bé nhất của A: $m = \min A$.

Ta định nghĩa $M = \max A$ bằng cách tương tự.

• Phương pháp tìm GTNN, GTLN:

– Nhóm và so sánh

– Dùng BĐT Côsi

– Dùng BĐT giá trị tuyệt đối,...

Chú ý: Dấu đẳng thức có thể nêu đầy đủ các biến, có thể chỉ ra biến (chẳng hạn), còn bài toán dùng điều kiện có nghiệm thì đã tồn tại.

Ví dụ 1: Tìm giá trị nhỏ nhất

a) $A = (x + 1)^2 + (x + 3)^2$ b) $B = (x + y)^2 + 3y^2 - 12y - 4xy + 25$.

Giải

a) $A = 2x^2 + 8x + 10 = 2(x + 2)^2 + 2 \geq 2$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow x = -2$. Vậy $\min A = 2$.

b) $B = x^2 + 2xy + y^2 + 3y^2 - 12y - 4xy + 25$

$= (x^2 - 2xy + y^2) + 3(y^2 - 4y + 4) + 13$

$= (x - y)^2 + 3(y - 2)^2 + 13 \geq 13$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 2$. Vậy minB = 13

Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất

a) $A = 5 - 3\sqrt{x} - x\sqrt{x+8}$ b) $B = ab + 2bc - ca - \frac{a^2}{4} - b^2 - c^2$

Giải

a) Điều kiện $x \geq 0$. Ta có: $3\sqrt{x} \geq 0$, $x\sqrt{x+8} \geq 0$

Nên $A = 5 - 3\sqrt{x} - x\sqrt{x+8} \leq 5$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$. Vậy maxA = 5.

b) $B = -[\frac{a^2}{4} - (b - c)a + (b - c)^2] = -(\frac{a}{2} - b + c)^2 \leq 0$

Vậy maxB = 0 khi $b = \frac{a}{2} + c$.

Ví dụ 3: Tìm giá trị nhỏ nhất:

a) $A = |x + 2| + |x + 5|$ b) $B = |x - 3| + |x - 1| + |x + 1| + |x + 3|$

Giải

a) $A = |x + 2| + |-x - 5| \geq |(x + 2) + (-x - 5)| = 3$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow (x + 2)(-x - 5) \geq 0 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq -2$. Vậy minA = 3

b) $B = |x - 3| + |x + 3| + |x - 1| + |x + 1|$

$= |3 - x| + |x + 3| + |1 - x| + |x + 1|$

$\geq |(3 - x) + (x + 3)| + |(1 - x) + (x + 1)| = 6 + 2 = 8$

Dấu = xảy ra, chẳng hạn khi x = 0. Vậy minB = 8.

Ví dụ 4: Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$y = \sqrt{x + 2(1 + \sqrt{x+1})} + \sqrt{x + 2(1 - \sqrt{x+1})}$$

Giải

Ta có: $y = \sqrt{(x+1) + 2\sqrt{x+1} + 1} + \sqrt{(x+1) - 2\sqrt{x+1} + 1}$

$= \sqrt{(1 + \sqrt{x+1})^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{x+1})^2} = |1 + \sqrt{x+1}| + |1 - \sqrt{x+1}|$

$\geq |1 + \sqrt{x+1} + 1 - \sqrt{x+1}| = 2$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow (1 + \sqrt{x+1})(1 - \sqrt{x+1}) \leq 0$

$\Leftarrow x \geq -1$ và $1 - (x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 0$

Vậy miny = 2.

Ví dụ 5: Tìm GTLN, GTNN của:

a) f(x) = (x + 3)(5 - x) với $-3 \leq x \leq 5$ b) $y = \sqrt{x - 1} + \sqrt{4 - x}$.

Giải

a) Vì $-3 \le x \le 5$ nên $x + 3 \ge 0, 5 - x \ge 0$

$\Rightarrow f(x) \ge 0$. Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow x = -3$ hoặc $x = 5$. Vậy $\min f(x) = 0$

Áp dụng BĐT Côsi cho 2 số không âm:

$(x + 3) + (5 - x) \ge 2\sqrt{(x+3)(5-x)} \Rightarrow 8 \ge \sqrt{f(x)} \Rightarrow f(x) \le 16$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow x + 3 = 5 - x \Leftrightarrow x = 1$. Vậy $\max f(x) = 16$

b) Điều kiện $1 \le x \le 4$. Ta có $y \ge 0$

$y^2 = x - 1 + 4 - x + 2\sqrt{(x-1)(4-x)} = 3 + 2\sqrt{(x-1)(4-x)}$

Do đó $y^2 \ge 3 \Rightarrow y = \sqrt{3}$. Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 4$.

Vậy $\min y = \sqrt{3}$

Vì $y^2 = 3 + 2\sqrt{(x-1)(4-x)} \le 3 + x - 1 + 4 - x = 6 \Rightarrow y \le \sqrt{6}$

Dấu bằng xảy ra khi $x - 1 = 4 - x \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$ (thoả mãn).

Vậy giá trị lớn nhất của y của $\sqrt{6}$, giá trị nhỏ nhất là $\sqrt{3}$.

Ví dụ 6: Tìm giá trị nhỏ nhất

a) $f(x) = x + \dfrac{2}{x-1}$ với $x > 1$ b) $g(x) = x + \dfrac{2}{x+2}$ với $x > -2$

Giải

a) Vì $x > 1$ nên $x - 1$ và $\dfrac{2}{x-1}$ là hai số dương.

Áp dụng BĐT Côsi

$$f(x) = x + \frac{2}{x-1} = 1 + x - 1 + \frac{2}{x-1} \ge 1 + 2\sqrt{(x-1)\frac{2}{x-1}} = 1 + 2\sqrt{2}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x - 1 = \dfrac{2}{x-1}, x > 1 \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của f(x) là $1 + 2\sqrt{2}$.

b) $x > -2$ nên $x + 2 > 0$. Ta có:

$$g(x) = x + \frac{2}{x+2} = (x+2) + \frac{2}{x+2} - 2 \ge 2\sqrt{(x+2)\frac{2}{x+2}} - 2 = 2\sqrt{2} - 2$$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow x + 2 = \dfrac{2}{x+2} \Leftrightarrow (x+2)^2 = 2$

Chọn $x = -2 + \sqrt{2}$. Vậy $\min g(x) = 2(\sqrt{2} - 1)$

Ví dụ 7: Tìm giá trị nhỏ nhất:

a) $f(x) = \left|x + \dfrac{1}{x}\right|$ b) $g(x) = \dfrac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Giải

a) Vì với mọi $x \neq 0$, x và $\frac{1}{x}$ cùng dấu nên:

$$f(x) = \left|x + \frac{1}{x}\right| = |x| + \frac{1}{|x|} \geq 2\sqrt{|x|.\frac{1}{|x|}} = 2 \text{, với mọi } x \neq 0$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow |x| = \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow |x| = 1$. Vậy minf(x) = 2.

b) $$g(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x^2+1}.\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}} = 2$$

Dấu bằng $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow x^2+1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Vậy min g(x) = 2.

Ví dụ 8: Tìm giá trị nhỏ nhất với $0 < x < 1$:

a) $y = \frac{4}{x} + \frac{9}{1-x}$ b) $y = \frac{x}{1-x} + \frac{5}{x}$

Giải

a) $$y = \frac{4(x+1-x)}{x} + \frac{9(x+1-x)}{1-x}$$

$$= 4 + 9 + \frac{4(1-x)}{x} + 9\frac{x}{1-x} \geq 13 + 2\sqrt{4.\frac{(1-x)}{x}.9\frac{x}{1-x}} = 25$$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \frac{4(1-x)}{x} = \frac{9x}{1-x} = 6 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$ (chọn).

Vậy miny = 25.

b) $$y = \frac{x}{1-x} + \frac{5(1-x)}{x} + 5 \geq 2\sqrt{\frac{x}{1-x}.\frac{5(1-x)}{x}} + 5 = 2\sqrt{5} + 5$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = \frac{5(1-x)}{x} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}$ (chọn)

Vậy miny = $2\sqrt{5} + 5$.

Ví dụ 9: Tìm giá trị nhỏ nhất với $x > 0$:

a) $y = 3x^2 + \frac{1}{x}$ b) $y = \frac{ax^3+b}{x^2}$, $a > 0, b > 0$.

Giải

Áp dụng BĐT Côsi cho 3 số dương.

a) $$y = 3x^2 + \frac{1}{x} = 3x^2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x} \geq 3\sqrt[3]{3x^2.\frac{1}{2x}.\frac{1}{2x}} = 3\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{2x} \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{6} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{6}}$. Vậy miny = $3.\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$.

b) $y = ax + \frac{b}{x^2} = \frac{ax}{2} + \frac{ax}{2} + \frac{b}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2b}{4}}$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \frac{ax}{2} = \frac{b}{x^2} \Leftrightarrow x^3 = \frac{2b}{a} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{2b}{a}}$

Vậy miny = $3.\sqrt[3]{\frac{2b}{a}}$.

Ví dụ 10: Tìm giá trị nhỏ nhất của:

a) $y = 4x^3 - x^4$ với $0 \leq x \leq 4$ b) $x^4 + y^4 + z^4$ với $xy + yz + zx = 1$

Giải

a) $y = 4x^3 - x^4 = x^3(4 - x)$

$\Rightarrow 3y = x.x.x(12 - 3x) \leq \left(\frac{x+x}{2}\right)^2 \left(\frac{x+12-3x}{2}\right)^2$

$\Rightarrow 48y \leq [2x(12 - 2x)]^2 \leq \left(\frac{2x+12-2x}{2}\right)^4 = 6^4 \Rightarrow y \leq 27$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow x = 12 - 3x, 2x = 12 - 2x \Leftrightarrow x = 3$.

Vậy miny = 27.

b) Sử dụng các bất đẳng thức $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ và $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$

Ta có: $x^4 + y^4 + z^4 \geq 1 \,|\, 3(x^2 + y^2 + z^2) \geq \frac{1}{3}(xy + y + xz)^2 = \frac{1}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x^4 + y^4 + z^4$ là $\frac{1}{3}$, đạt được khi và chỉkhi

$x = y = z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 11: Cho $x, y, z \geq 0$ và $x + y + z = k$. Xác định x, y, z để:

a) $A = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) $B = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải

a) Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$x + y + z \geq 3.\sqrt[3]{xyz}$; $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3.\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$

Do đó: $(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9 \Rightarrow A = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{k}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{k}{3}$

ABC

b) $B = \left(1-\frac{1}{x+1}\right)+\left(1-\frac{1}{y+1}\right)+\left(1-\frac{1}{z+1}\right) = 3-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\right)$

$\le 3-\frac{9}{(x+1)+(y+1)+(z+1)} = 3-\frac{9}{k+3} = \frac{3k}{k+3}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{k}{3}$.

Ví dụ 12: Tìm giá trị lớn nhất của:

a) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{(x^2+1)^2(x^2+3)}}{3x^2+4}$

b) $f(x; y; z) = \frac{xy\sqrt{z-1}+yz\sqrt{x-2}+zx\sqrt{y-3}}{xyz}$, với $x \ge 2, y \ge 3, z \ge 1$

Giải

a) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{5(x^2+1)}{3x^2+4}\cdot\frac{5(x^2+1)}{3x^2+4}\cdot\frac{2(x^2+3)}{3x^2+4}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{50}}$

$\le \sqrt[3]{\frac{1}{50}}\cdot\frac{5(x^2+1)+5(x^2+1)+2(x^2+3)}{3(3x^2+4)} = \frac{4}{3\sqrt[3]{50}}$

$\max f(x) = \frac{4}{3\sqrt[3]{50}}$ khi $5(x^2+1) = 2(x^2+3) \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) Ta có: $f(x, y, z) = \frac{\sqrt{z-1}}{z}+\frac{\sqrt{x-2}}{x}+\frac{\sqrt{y-3}}{y}$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$\sqrt{z-1} = \sqrt{1(z-1)} \le \frac{1+(z-1)}{2} = \frac{z}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{z-1}}{z} \le \frac{1}{2}$

$\sqrt{x-2} = \frac{\sqrt{2(x-2)}}{\sqrt{2}} \le \frac{2+x-2}{2\sqrt{2}} = \frac{x}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{x-2}}{x} \le \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\sqrt{y-3} = \frac{\sqrt{3(y-3)}}{\sqrt{3}} \le \frac{3+y-3}{2\sqrt{3}} = \frac{y}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{y-3}}{y} \le \frac{1}{2\sqrt{3}}$

Do đó $f(x; y; z) \le \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{6+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{12}$

Vậy $\max f = \frac{6+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{12}$ khi $x = 4, y = 6, z = 2$.

Ví dụ 13: Cho a, b, c, d dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$T = \frac{a}{b+c+d}+\frac{b+c+d}{a}+\frac{b}{c+d+a}+\frac{c+d+a}{b}+\frac{c}{d+a+b}+\frac{d+a+b}{c}+\frac{d}{a+b+c}+\frac{a+b+c}{d}$

ABC

Giải

$$T = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{3a}{b+c+d}+\frac{b+c+d}{3a}\right)+\left(\frac{3b}{c+d+a}+\frac{c+d+a}{3b}\right)\right]$$

$$+\left(\frac{3c}{d+a+b}+\frac{d+a+b}{3c}\right)+\left(\frac{3d}{a+b+c}+\frac{a+b+c}{3d}\right)$$

$$+\frac{8}{9}\left[\frac{b+c+d}{a}+\frac{c+d+a}{b}+\frac{d+a+b}{c}+\frac{a+b+c}{d}\right]$$

$$\geq \frac{1}{3}[2+2+2+2]+\frac{3}{9}\left[\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{d}{a}+\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{d}{b}+\frac{b}{d}\right)+\left(\frac{d}{c}+\frac{d}{d}\right)\right] \geq \frac{8}{3}+\frac{8}{9}[2+2+2+2+2]=\frac{40}{3}$$

Vậy $\min T = \frac{40}{3}$ khi $a = b = c = d$.

Ví dụ 14: Cho x, y, z thay đổi và thoả mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của biểu thức:

$$P = x + y + z + xy + yz + zx$$

Giải

Ta có: $1 = x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + z)$

nên $P = x + y + z - \frac{(x+y+z)^2 - 1}{2} = \frac{1}{2}(x + y + z + 1)^2 - 1 \geq -1$

Khi $x = -1$, $y = z = 0$ thì $P = -1$. Vậy $\min P = -1$

Ta có $xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Nên $(x + y + z)^2 = 1 + 2(xy + yz + zx) \leq 3$. Do đó $P \leq \sqrt{3} + 1$

Khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$ thì $P = \sqrt{3}$. Vậy $\max P = \sqrt{3} + 1$.

Ví dụ 15: Cho x, y, z, t thay đổi và thoả mãn $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x^2+y^2+z^2+t^2=1 \end{cases}$

Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của biểu thức: $Q = xy + yz + zt + tx$.

Giải

Ta có: $Q = xy + yz + zt + tx = (x + z)(y + t)$

Do: $x + y + z + t = 0$ nên $y + t = -(x + z)$

Do đó: $Q = -(x + z)^2 \leq 0$

Chọn $x = y = \frac{1}{2}$, $z + t = -\frac{1}{2}$ thì $Q = 0$. Vậy $\max Q = 0$

Ta có: $0 = (x + y + z + t)^2$

$= (x^2 + y^2 + z^2 + t^2) + 2(xy + yz + zt + tx) + 2xz + 2yt = 1 + 2Q + 2xz + 2y/t$

$\leq 1 + 2Q + (x^2 + z^2) + (y^2 + t^2) = 2 + 2Q \Rightarrow Q \geq -1$

Chọn $x = z = \frac{1}{2}$, $y = t = -\frac{1}{2}$ thì $Q = -1$. Vậy $\min Q = -1$.

C. BÀI LUYỆN TẬP

1. Chứng minh bất đẳng thức:

a) $a > b > 0 \Rightarrow a^2 > b^2$ b) $a > b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$

c) $b,d > 0; \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ d) $m > n \Rightarrow \sqrt[3]{m} > \sqrt[3]{n}$

HD: Dùng định nghĩa

2. Chứng minh:

a) $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$ b) $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$, a + b >0

c) $\frac{1}{3} \leq \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} \leq 3$ d) $x^4 + y^4 \leq \frac{x^6}{y^2} + \frac{y^6}{x^2}; (xy \neq 0)$

HD: Dùng biến đổi tương đương

3. Chứng minh bất đẳng thức:

a) Nếu 4x + y = 1 thì $4x^2 + y^2 \geq \frac{1}{5}$ b) Nếu 4x –3y = 15 thì $x^2 + y^2 \geq 9$.

HD: Dùng phép thế rồi biến đổi tương đương

4. Chứng minh bất đẳng thức:

a) Nếu Δ : a < b < c thì $a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2) < 0$

b) Nếu a, b > 0 và a + b = 2 thì $ab \leq a^a.b^b$.

c) Nếu ad – bc = 1 thì $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ac + bd \geq \sqrt{3}$.

HD: Dùng biến đổi tương đương

5. Chứng minh bất đẳng thức:

a) $\sin^4 x + \cos^8 x \leq 1$ b) $\sin^{10} x + \cos^{11} x \leq 1$

c) $(1+x)^n + (1-x)^n \leq 2^n; (|x| \leq 1), n \geq 1$

HD: Dùng so sánh

6. Chứng minh bất đẳng thức:

a) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 2(\sqrt{n+1} - 1)$ b) $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{n^3} \leq 2$

c) $2 < \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{12}} < 3$

HD: Dùng so sánh và sai phân

7. Chứng minh bất đẳng thức với các số dương:

a) $(1+\frac{a}{b})(1+\frac{b}{c})(1+\frac{c}{a}) \geq 8$ b) (a + b + c)(ab + bc + ca) ≥ 9abc

c) $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < 5; (a+b+c=1)$

HD: dùng bất đẳng thức Côsi

8. Chứng minh bất đẳng thức với các số dương:

a) $a^3 + b^3 + c^3 \geq ab^2 + bc^2 + ca^2$

b) $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab}$

c) Nếu $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} + \frac{1}{1+d} \geq 3$ thì $abcd \leq \frac{1}{81}$

HD: dùng bất đẳng thức Côsi

9. Chứng minh bất đẳng thức:

a) $|x-1|+|5-x|\geq 4$ b) $|x-1|-|x+6|\leq 7$

c) $|x-y|+|y-z|+|z-t|\geq|x-t|$ d) $|x+5|+|x-2|+|x-3|\geq 8$

HD: Dùng bất đẳng thức giá trị tuyệt đối

10. Chứng minh bất đẳng thức:

a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\geq\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2$ b) $\sqrt{c}\left(\sqrt{a-c}+\sqrt{b-c}\right)\leq\sqrt{ab}$

HD: dùng bổ đề bất đẳng thức $|ac+bd|\leq\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{c^2+d^2}$.

11. Chứng minh bất đẳng thức:

$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\leq(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$

Áp dụng chứng minh:

a) $3(a^2+b^2+1)\geq(a+b+1)^2$ b) $(a+b+c)^4\leq 27(a^4+b^4+c^4)$

c) $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$

d) $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2\geq\frac{25}{2};(a,b>0,a+b=1)$

12. Chứng minh bất đẳng thức SCHUR: Nếu a,b,c > 0 và r > 0 thì:

$a^r(a-b)(a-c)+b^r(b-c)(b-a)+c^r(c-a)(c-b)\geq 0.$

HD: Dùng biến đổi tương đương

13. Chứng minh bất đẳng thức:

a) Nếu m + n = 2pq thì $p^2\geq m$ hay $q^2\geq n$

b) Nếu a + b + c > 0, ab + bc + ca > 0, abc > 0 thì a, b, c > 0

HD: Dùng phản chứng

14. Chứng minh nếu a, b, c $\in(0;1)$ thì có ít nhất 1 bất đẳng thức sau sai:

$4a(1-b)>1;\ 4b(1-c)>1;\ 4c(1-a)>1.$

HD: Dùng phản chứng và bất đẳng thức Côsi

15. Chứng minh bất đẳng thức:

a) $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geq\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$

b) $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\leq 1$ c) $|ac+bd|\leq\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{c^2+d^2}$

d) $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+(m-b)^2}+\sqrt{b^2+(m-a)^2}+\sqrt{(m-a)^2+(m-b)^2}\geq m\sqrt{2}$

HD: Dùng phương pháp toạ độ

16. Chứng minh bất đẳng thức:

a) Nếu a + b > 0 thì $\frac{a^3+b^3}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$

b) Nếu a + b ≥ 2 thì $\frac{a^n+b^n}{2}\leq\frac{a+b}{2}.\frac{a^n+b^n}{2}\leq\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2}$

17. Chứng minh bất đẳng thức:

a) Nếu a + b = 1 thì $a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}, a^4+b^4 \geq \frac{1}{8}$

b) $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x} \leq 2-\frac{x^2}{4}; (-1 \leq x \leq 1)$

c) $2 < \frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{b+c+d}+\frac{c+d}{c+d+a}+\frac{d+a}{d+a+b} < 3; (a,b,c,d > 0)$

18. Chứng minh bất đẳng thức:

a) $(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c), \forall a,b,c$

b) Nếu $a,b,c > 0, a+b+c \leq 1$ thì $\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab} \geq 9$

c) $(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2\right) \leq 3\left(x^3+y^3+z^3\right); (x,y,z > 0)$

19. Chứng minh bất đẳng thức:

a) $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{1.3.5}+...+\frac{1}{1.3.5...(2n+1)} < \frac{1}{2}$

b) $\left(1+\frac{1}{1.3}\right)\left(1+\frac{1}{2.4}\right)...\left(1+\frac{1}{n.(n+2)}\right) < 2$

c) $a^n + b^n < c^n$ (4 số nguyên dương n, b, c > a)

20. Chứng minh bất đẳng thức:

a) $|x+1|+|x+2|+|x+7|+|x+8| \geq 12$

b) $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a} < \sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}; (a,b,c > 0)$

21. Tìm

a) GTNN của $y = x^2 - 6x + 5$ b) GTLN của $y = -2x^2 + 3x - 1$

c) GTNN của $y = (x-1)^2 + (2x-3)^2 + (3x-5)^2$

d) GTLN của $T = 2y - 2x - 2xy - 2x^2 - 2y^2 + 7$

HD: Dùng phương pháp nhóm bình phương

22. TìmGTLN, NN:

a) $y = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ b) $y = \frac{20x^2+10x+3}{3x^2+2x+1}$

c) $T = \frac{3x^2+4xy}{x^2+y^2}$ d) $T = \frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}$

HD: Dùng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai

23. Dùng so sánh, tìm:

a) GTNN $y = x^4 + 4x^2 + 2$ b) GTLN $y = \sin^4 x + \cos^8 x$

c) GTNN $y = |\sin x| + |\cos x|$ d) GTNN $y = \sqrt{x^2 + 4x + 5}.\sqrt{b^2 - 2b + 10}$

HD: Dùng so sánh

24. Dùng bất đẳng thức Côsi, tìm GTNN:

a) $y = x + \frac{3}{x}; (x > 0)$ b) $y = x + \frac{2}{x-3}; (x > 3)$

c) $y = 5^{x+1} + 5^{2-x}$ d) $y = \frac{2x^2 + 3x + 7}{x}; (x > 0)$

25.Dùng bất đẳng thức côsi, tìm GTLN:

a) $y = \frac{x}{x^2 + 9}$ b) $y = x^2 - x^3; 0 \le x \le 1$

c) $y = \frac{\sqrt{x-4}}{x}$ d) $T = (3-x)(4-y)(2x+3y); 0 \le x \le 3; 0 \le y \le 4$

26. Tìm GTLN,GTNN của:

a) $f(x) = (x + 3)(6 - x)$ với $-3 \le x \le 6$

b) $f(x) = (x + 1)(10 - x)$ với $-1 \le x \le 10$

c) $A = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$

d) $B = 2\sqrt{x-2} + \sqrt{11-4x}$

HD: Dùng bất đẳng thức Côsi

27. Tìm GTLN của

a) $y = x(a - 2x)^2, 0 \le x \le a/2$ b) $y = \sin^2 x.\cos x$

HD: Dùng bất đẳng thức Côsi

28. a) Cho x, y, z > 0 và x + y + z = xyz. Tìm GTNN A = x + y + z

b) Cho x + y = 1.Tìm GTLN $B = xy^3$

c) Cho x,y>0,xy = 4. Tìm GTNN $C = x + y + x\sqrt{9 + y^2} + y\sqrt{9 + x^2}$

HD: Dùng bất đẳng thức Côsi

29. Tìm GTNN:

a) $y = |x - 3| + |x + 5|$ b) $y = |x - 1| + |x + 2| + |x + 4|$

c) $y = |x + 2| + |2x + 1|$ d) $y = \sqrt{x + 2 + 2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x + 2 - 2\sqrt{x+1}}$

HD: Dùng bất đẳng thức giá trị tuyệt đối

30. Tìm GTNN:

a) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 2} + \sqrt{x^2 + 4x + 8}$ b) $y = \sqrt{4x^2 + 2} + \sqrt{4x^2 + 12x + 11}$

c) $y = \sqrt{(a+x)^2 + b^2} + \sqrt{(a-x)^2 + b^2}$ d) $y = 3\sqrt{x-1} - 4\sqrt{5-x}$

HD: Dùng phương pháp toạ độ

ABC

31. Tìm GTNN:

a) $y = \sqrt{2x-2} + \sqrt{3-2x}$ b) $y = \sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}$

c) $y = 3x^2 + \sqrt{1-x^4}$ d) $y = 5|x| + 2\sqrt{2-3x^2}$

HD:Dùng phép bình phương

32. Tìm:

a) GTNN: $A = 4 + a^2b^4 + a^4b^2 - 3a^2b^2$

b) GTNN: $B = x + y$ với $x, y > 0$ và $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 6$

33. Tìm:

a) GTNN: $f(x,y) = (x - y + 1)^2 + (3x + my + 2)^2$

b) GTLN, NN $C = 2x + 3y - 2z$ với $\begin{cases} 2x + y + 3z = 4 \\ 3x + 4y - 3z = 6 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases}$

34. a) Cho $x, y > 0$ và $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$. Tìm GTNN: $B = x^2y + xy^2$

b) Cho $|x| + |y| + |z| = 6$. Tìm GTNN: $C = |x - 1| + |y - 1| + |z - 1|$

ĐS: a) 16 b) 3

35. Cho n số a_i phân biệt. Tìm GTNN:

a) $f(x) = |x - a_1| + |x - a_2| + ... + |x - a_n|$

b) $f(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + ... + (x - a_n)^2$

36. a) Cho a,b,c >0. Tìm GTNN của: $A = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$

b) Tìm GTLN $A = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}$ với $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 1$.

ĐS: a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{3}{4}$

§2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH, NHỊ THỨC BẬC NHẤT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

– Bất phương trình: Cho 2 hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ có tập xác định D_f, D_g. Mệnh đề chứa biến $f(x) < g(x)$, $f(x) \le g(x)$, $f(x) > g(x)$, $f(x) \ge g(x)$, gọi là bất phương trình một ẩn, tập xác định $D = D_f \cap D_g$.

– Điều kiện của một bất phương trình là điều kiện mà ẩn số phải thoả mãn để các biểu thức ở hai vế của bất phương trình có nghĩa.

– Hai bất phương trình (hệ bất phương trình) được gọi là tương đương với nhau nếu chúng có cùng một tập nghiệm.

– Các phép biến đổi bất phương trình: Cho bất phương $f(x) < g(x)$ có tập xác định D, $y = h(x)$ là hàm số xác định trên D. Khi đó $f(x) < g(x)$ tương đương với:

1) $f(x) + h(x) < g(x) + h(x)$

2) $f(x).\ h(x) < g(x).\ h(x)$ nếu $h(x) > 0, \forall x \in D$

3) $f(x).\ h(x) > g(x).\ h(x)$ nếu $h(x) < 0, \forall x \in D$

– Bất phương trình bậc nhất một ẩn:

Dạng $ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b$

Nếu $a > 0$ thì $x > -\frac{b}{a}$. Nếu $a < 0$ thì $x < -\frac{b}{a}$

Nếu $a = 0, b \le 0$ thì bất phương trình vô nghiệm.

Nếu $a = 0, b > 0$ thì bất phương trình có nghiệm là mọi x.

– Giải hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn:

Giải từng bất phương trình rồi tìm giao các tập nghiệm.

– Dấu nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b$, $a \ne 0$:

x	$-\infty$	$-b/a$	$+\infty$
f(x)	trái dấu a	0	cùng dấu a

B. PHÂN DẠNG TOÁN

DẠNG 1: GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH

– Điều kiện xác định của bất phương trình $f(x) > g(x)$ là giao của hai điều kiện xác định của hai hàm số f(x), g(x): $D = D_f \cap D_g$.

– Hai bất phương trình được gọi là tương đương với nhau nếu chúng có cùng một tập nghiệm.

Nếu x_0 là nghiệm của bất phương trình này nhưng không là nghiệm của bất phương trình kia thì hai bất phương trình không tương đương.

Chú ý:

– Sử dụng định nghĩa và định lý biến đổi tương đương khi cộng thêm vào, nhân chia 2 vế.

– Khi biến đổi các biểu thức ở hai vế của một bất phương trình, điều kiện của bất phương trình thường bị thay đổi. Vì vậy, để tìm nghiệm của bất phương trình đã cho ta phải tìm các giá trị của ẩn đồng thời thoả mãn bất phương trình mới và điều kiện của bất phương trình đã cho.

Ví dụ 1: Tìm tập xác định của các bất phương trình sau:

a) $\frac{1}{1+x}+\frac{3}{x+2}<2$; b) $\frac{(x-3)(x+2)^2}{(x-3)^2(x+4)}\geq\sqrt{x+1}$

Giải

a) Điều kiện xác định: $\begin{cases}x+1\neq 0\\x+2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -1\\x\neq -2\end{cases}$.

Vậy D = **R** \ {–2 ; –1}

b) Điều kiện xác định: $\begin{cases}x-3\neq 0\\x+4\neq 0\\x+1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 3\\x\neq -4\\x\geq -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -1\\x\neq 3\end{cases}$

Vậy D = [–1 ; +∞) \ {3}.

Ví dụ 2: Tìm tập xác định của bất phương trình:

a) $\frac{1}{x^2-1}>\frac{1}{x^2-5x+6}$ b) $|x-1|+\sqrt[3]{x+1}>\frac{1}{x-3}$

c) $\sqrt{x-3}+2\sqrt[3]{x-2}<x+\frac{1}{x}$ d) $\sqrt{x^2+4x+4}+2|x|<\frac{1}{x^2+3}$

Giải

a) ĐK: $\begin{cases}x^2-1\neq 0\\x^2-5x+6\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\pm 1\\x\neq 2, x\neq 3\end{cases}$ Vậy D=**R**\{–1;1;2;3}

b) ĐK: $x-3\neq 0\Leftrightarrow$. Vậy D = **R** \ {3}.

c) ĐK: $\begin{cases}x-3>0\\x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x>3$. Vậy D = (3 ; +∞) .

d) Vì $x^2+4x+4=(x+2)^2\geq 0$, ∀x nên D = **R**.

Ví dụ 3: Tìm điều kiện xác định rồi suy ra tập nghiệm:

a) $\sqrt{x}>\sqrt{-x}$ b) $\sqrt{x-3}<1+\sqrt{x-3}$

c) $x+\frac{1}{x-3}\geq 2+\frac{1}{x-3}$ d) $\frac{x}{\sqrt{x-2}}<\frac{2}{\sqrt{x-2}}$

Giải

a) ĐK: $x\geq 0$ và $-x\geq 0\Leftrightarrow x=0$

Thế x = 0 vào BPT: 0 > 0 (sai). Vậy S = ∅

b) ĐK: $x-3\geq 0\Leftrightarrow x\geq 3$

Trong điều kiện đó thì $1+\sqrt{x-3}>\sqrt{x-3}$ (đúng)

Vậy S = D = [3 ; +∞)

c) ĐK: $x \neq 3$. Trong điều kiện đó thì:
BPT $\Leftrightarrow x > 2$. Vậy $D = [2 ; +\infty) \setminus \{3\}$.

d) ĐK: $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$. Trong trường hợp đó thì:
BPT $\Leftrightarrow x < 2$ (loại). Vậy $S = \varnothing$

Ví dụ 4: Giải các bất phương trình:

a) $\dfrac{(x-4)\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}} < 2$ b) $x + \sqrt{x} > (2\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)$

c) $\sqrt{(x+2)^2(x-3)} > 0$ d) $\sqrt{(x-4)^2(x+1)} \geq 0$

Giải

a) $\dfrac{(x-4)\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}} < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3>0 \\ x-4<2 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 6$. Vậy $S = (3;6)$

b) $x + \sqrt{x} > (2\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1) \Leftrightarrow x + \sqrt{x} > 2x - 3 + \sqrt{x}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x > 2x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x < 3$. Vậy $S = [0 ; 3)$

c) $\sqrt{(x+2)^2(x-3)} > 0 \Leftrightarrow (x+2)^2(x-3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \neq 0 \\ x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x > 3 \end{cases}$

d) $\sqrt{(x-4)^2(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow (x-4)^2(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -1$

Ví dụ 5: Chứng minh bất phương trình:

a) $(\sqrt{1-x} + 3)(2\sqrt{1-x} - 5) > \sqrt{1-x} - 3$ có nghiệm

b) $\sqrt{x^2 - x + 1} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} < 2$ vô nghiệm

Giải

a) Xét $x = -8$ thì BPT:
$(\sqrt{9} + 3)(2\sqrt{9} - 5) > \sqrt{9} - 3 \Leftrightarrow 6.1 > 0$: đúng
Vậy BPT có nghiệm

b) Theo bất đẳng thức Côsi ta có: $\sqrt{x^2 - x + 1} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} \geq 2$, $\forall x$

Vậy bất phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 6: Bất phương trình $2x - 1 \geq 0$ tương đương với BPT nào?

(1): $2x - 1 + \dfrac{1}{x-3} \geq \dfrac{1}{x-3}$; (2): $2x - 1 - \dfrac{1}{x+3} \geq -\dfrac{1}{x+3}$

Giải

Ta có $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{2}$

BPT (1) có điều kiện $x \neq 3$ nên không tương đương.
BPT (2) có điều kiện $x \neq -3$ (thoả mãn) nên tương đương.

Ví dụ 7: Hai bất phương trình sau có tương đương không?

a) $x^2 \le x$ và $x \le 1$ b) $x > |x + 1|$ và $x^2 > (x + 1)^2$

Giải

a) Hai bất phương trình không tương đương, vì $x = -3$ không là nghiệm của bất phương trình $x^2 \le x$ nhưng lại là nghiệm của bất phương trình $x \le 1$

b) Vì $x = -1$ là nghiệm của $x^2 > (x + 1)^2$ nhưng không là nghiệm của $x > |x + 1|$ nên 2 bất phương trình không tương đương.

Ví dụ 8: Tìm cặp bất phương trình tương đương:

a) $x - 2 > 0$ và $x^2(x - 2) < 0$ b) $x - 2 < 0$ và $x^2(x - 2) > 0$

c) $x - 2 \le 0$ và $x^2(x - 2) \le 0$ d) $x - 2 \ge 0$ và $x^2(x - 2) \ge 0$

Giải

a) Không tương đương, vì $x = 3$ là nghiệm của bất phương trình đầu nhưng không là nghiệm của bất phương trình sau.

b) Không tương đương, vì $x = 0$ là nghiệm của bất phương trình đầu nhưng không là nghiệm của bất phương trình sau.

c) Tương đương, vì $x - 2 \le 0 \Leftrightarrow x \le 2$

$$x^2(x - 2) \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x \ne 0, x - 2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \le 2$$

d) Không tương đương, vì $x = 0$ là nghiệm của bất phương trình sau nhưng không là nghiệm của bất phương trình đầu.

Ví dụ 9: Tìm m để 2 BPT tương đương:

a) $4x - 1 > 0$ và $x + m > 2$ b) $x - m \ge 0$ và $x^2(x - m) \ge 0$

Giải

a) $4x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{4}$ và $x + m > 2 \Leftrightarrow x > 2 - m$

Điều kiện 2 BPT tương đương: $2 - m = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = \frac{7}{4}$

b) $x - m \ge 0 \Leftrightarrow x \ge m$ và $x^2(x - m) \ge 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x \ge m$

Vậy điều kiện 2 BPT tương đương là $m \le 0$.

DẠNG 2: BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

– Giải và biện luận dạng $ax + b < 0$: $ax + b < 0 \Leftrightarrow ax < -b$

Nếu $a > 0$ thì $x < -\frac{b}{a}$. Tập nghiệm $S = (-\infty ; -\frac{b}{a})$

Nếu $a < 0$ thì $x > -\frac{b}{a}$. Tập nghiệm $S = (-\frac{b}{a} ; +\infty)$

Nếu $a = 0$ thì $0.x < -b$, do đó:

Khi $b \ge 0$ thì bất phương trình vô nghiệm: $S = \varnothing$

Khi $b \le 0$ thì nghiệm bất phương trình là mọi x: $S = \mathbf{R}$

– Giải biện luận dạng $ax + b \ge 0$: $ax + b \ge 0 \Leftrightarrow ax \ge -b$

Nếu $a > 0$ thì $x \geq -\frac{b}{a}$. Tập nghiệm $S = [-\frac{b}{a} ; +\infty)$

Nếu $a < 0$ thì $x \leq -\frac{b}{a}$. Tập nghiệm $S = (-\infty ; -\frac{b}{a}]$

Nếu $a = 0$ thì $0.x < -b$, do đó:

Khi $b > 0$ thì bất phương trình vô nghiệm: $S = \varnothing$

Khi $b \leq 0$ thì nghiệm của bất phương trình là mọi x: $S = \mathbf{R}$.

Chú ý:

– Chuyển x về một bên, số về một bên.

– Có lấy dấu bằng hay không.

– Điều kiện cần để $ax + b > 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm với mọi x là $a = 0$.

– Điều kiện để $ax + b > 0$ có nghiệm là $a \neq 0$, hoặc $a = 0, b > 0$.

– Dùng đồ thị, đường thẳng, tia, đoạn thẳng để giải toán.

Ví dụ 1: Giải các bất phương trình:

a) $\frac{x+2}{3} - x + 1 > x + 3$ b) $\frac{3x+5}{2} - 1 \leq \frac{x+2}{3} + x$

c) $(1-\sqrt{2})x < 3 - 2\sqrt{2}$ d) $(x+\sqrt{3})^2 \geq (x-\sqrt{3})^2 + 2$

Giải

a) BPT $\Leftrightarrow x + 2 - 3x + 3 > 3x + 9 \Leftrightarrow 5x < -4 \Leftrightarrow x < -\frac{4}{5}$

Vậy $S = (-\infty ; -\frac{4}{5})$

b) BPT $\Leftrightarrow 9x + 15 - 6 \leq 2x + 4 + 6x \Leftrightarrow x \geq -5$

Vậy $S = [-5 ; +\infty)$

c) Vì $1 - \sqrt{2} < 0$ nên BPT tương đương

$(1 - \sqrt{2})x < (1 - \sqrt{2})^2 \Leftrightarrow x > 1 - \sqrt{2}$. Vậy $S = (1 - \sqrt{2} ; +\infty)$

d) BPT $\Leftrightarrow x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 \geq x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 + 2 \Leftrightarrow 4\sqrt{3}x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Vậy $S = [\frac{1}{2\sqrt{3}} ; +\infty)$.

Ví dụ 2: Giải các bất phương trình:

a) $\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} + \frac{x+3}{4} \geq 1 + \frac{x}{2}$ b) $2(x - 1) - x > 3(x - 1) - 2x - 5$

c) $5(x - 1) - x(7 - x) < x^2$ d) $(x - 1)^2 + (x - 3)^2 + 15 < x^2 + (x - 4)^2$

Giải

a) BPT $\Leftrightarrow 6(x + 1) + 4(x + 2) + 3(x + 3) \geq 12 + 6x$

$\Leftrightarrow 7x \geq -11 \Leftrightarrow x \geq -\frac{11}{7}$

b) BPT $\Leftrightarrow 2x - 2 - x > 3x - 3 - 2x - 5$

$\Leftrightarrow 0.x > -6$: nghiệm đúng với mọi x

b) BPT $\Leftrightarrow 5x - 5 - 7x + x^2 < x^2 \Leftrightarrow -2x < 5 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{2}$

d) BPT $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + x^2 - 6x + 9 + 15 < x^2 + x^2 - 8x + 16$

$\Leftrightarrow 0.x < -9$: Vô nghiệm

Ví dụ 3: Giải và biện luận các bất phương trình:

a) $m(x - m) \le x - 1$ b) $mx + 6 > 2x + 3m$

c) $(x + 1)k + x < 3x + 4$ d) $(a + 1)x + a + 3 \ge 4x + 1$

Giải

a) $m(x - m) \le x - 1 \Leftrightarrow (m - 1)x \le m^2 - 1 \Leftrightarrow (m - 1)x \le (m - 1)(m + 1)$

Nếu $m = 1$ thì $0x \le 2$ (đúng) : $S = \mathbf{R}$

Nếu $m > 1$ thì $x \le m + 1$: $S = (-\infty ; m + 1]$

Nếu $m < 1$ thì $x \ge m + 1$: $S = [m + 1 ; +\infty)$

b) $mx + 6 > 2x + 3m \Leftrightarrow (m - 2)x > 3m - 6 \Leftrightarrow (m - 2)x > 3(m - 2)$

Nếu $m = 2$ thì $0x > 0$ (sai) : $S = \varnothing$

Nếu $m > 2$ thì $x > 3$: $S = (3 ; +\infty)$

Nếu $m < 2$ thì $x < 3$: $S = (-\infty ; 3)$

c) $(x + 1)k + x < 3x + 4 \Leftrightarrow kx + k < 2x + 4 \Leftrightarrow (k - 2)x < 4 - k$

Nếu $k = 2$ thì $0x < 2$ (đúng) : $S = \mathbf{R}$

Nếu $k > 2$ thì $x < \frac{4-k}{k-2}$: $S = (-\infty ; \frac{4-k}{k-2})$

Nếu $k < 2$ thì $x > \frac{4-k}{k-2}$: $S = (\frac{4-k}{k-2} ; +\infty)$

d) $(a + 1)x + a + 3 \ge 4x + 1 \Leftrightarrow (a - 3)x \ge -a - 2$

Nếu $a = 3$ thì $0x \ge -5$ (đúng) : $S = \mathbf{R}$

Nếu $a > 3$ thì $x \ge \frac{a+2}{3-a}$: $S = [\frac{a+2}{3-a} ; +\infty)$

Nếu $a < 3$ thì $x \le \frac{a+2}{3-a}$: $S = (-\infty ; \frac{a+2}{3-a}]$

Ví dụ 4: Giải và biện luận các bất phương trình:

a) $m(x - m) > 2(4 - x)$ b) $3x + m^2 \ge m(x + 3)$

c) $k(x - 1) + 4x \ge 5$ d) $b(x - 1) \le 2 - x$

Giải

a) $m(x - m) > 2(4 - x) \Leftrightarrow (m + 2)x > m^2 + 8$

Nếu $m = -2$ thì bất phương trình $0x \ge 12$: vô nghiệm

Nếu $m > -2$ thì bất phương trình có nghiệm $x > \frac{m^2+8}{m+2}$

Nếu $m < -2$ thì bất phương trình có nghiệm $x < \frac{m^2+8}{m+2}$

b) $3x + m^2 \geq m(x + 3) \Leftrightarrow (m - 3)x \leq m^2 - 3m \Leftrightarrow (m - 3)x \leq m(m - 3)$

Nếu $m = 3$ thì bất phương trình $0x \leq 0$: nghiệm là mọi x.

Nếu $m > 3$ thì bất phương trình có nghiệm $x \leq m$

Nếu $m < 3$ thì bất phương trình có nghiệm $x \geq m$

c) $k(x - 1) + 4x \geq 5 \Leftrightarrow (k + 4)x \geq k + 5$

Nếu $k = -4$ thì bất phương trình $0x \geq 1$: vô nghiệm

Nếu $k > -4$ thì bất phương trình có nghiệm $x \geq \dfrac{k+5}{k+4}$

Nếu $k < -4$ thì bất phương trình có nghiệm $x \leq \dfrac{k+5}{k+4}$

d) $b(x - 1) \leq 2 - x \Leftrightarrow (b + 1)x \leq b + 2$

Nếu $b = -1$ thì bất phương trình $0x \leq 1$: nghiệm là mọi x.

Nếu $b > -1$ thì bất phương trình có nghiệm $x \leq \dfrac{b+2}{b+1}$

Nếu $b < -1$ thì bất phương trình có nghiệm $x \geq \dfrac{b+2}{b+1}$

Ví dụ 5: Tìm m để mỗi bất phương trình sau vô nghiệm:

a) $m^2x + 4m - 3 < x + m^2$ b) $m^2x + 1 \geq m + (3m - 2)x$

Giải

a) $m^2x + 4m - 3 < x + m^2 \Leftrightarrow (m^2 - 1)x < m^2 - 4m + 3$

$\Leftrightarrow (m - 1)(m + 1)x < (m - 1)(m - 3)$

Để bất phương trình vô nghiệm, điều kiện cần là:

$(m - 1)(m + 1) = 0 \Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = -1$

Với $m = 1$, ta được $0x < 0$: bất phương trình vô nghiệm.

Với $m = -1$, ta được $0x < 8$: mọi x đều là nghiệm (loại).

Vậy $m = 1$

b) $m^2x + 1 \geq m + (3m - 2)x \Leftrightarrow (m^2 - 3m + 2)x \geq m - 1$

$\Leftrightarrow (m - 1)(m - 2)x \geq m - 1$

Đê BPT vô nghiệm, điều kiện là: $(m - 1)(m - 2) = 0 \Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = 2$

Với $m = 1 \Leftrightarrow 0x \geq 0$: mọi x đều là nghiệm (loại).

Với $m = 2 \Leftrightarrow 0x \geq 1$: Bất phương trình vô nghiệm. Vậy $m = 2$

Ví dụ 6: Định m để bất phương trình:

a) $m^2x + mx \leq 1$ có tập nghiệm là R

b) $m^2(mx - 1) < m(1 - m)x$ có nghiệm

c) $(m + 1)x - m^2 + m + 12 > 0$ có tập nghiệm là $\mathbf{R^+}$

Giải

a) $m^2x + mx \leq 1 \Leftrightarrow m(m + 1)x \leq 1$

Vì $1 > 0$ nên điều kiện có tập nghiệm là **R** khi $m(m + 1) = 0$

$\Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = -1$.

b) $m^2(mx - 1) < m(1 - m)x \Leftrightarrow m(m^2 + m - 1)x < m^2$

Xét m = 0 thì 0x < 0: vô nghiệm (loại)

Xét $m^2 + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

thì BPT: $0x < \left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^2$: có nghiệm với mọi x

Xét $m(m^2 + m - 1) \neq 0$ thì BPT luôn có nghiệm.

Vậy BPT có nghiệm khi $m \neq 0$.

c) $(m + 1)x - m^2 + m + 12 > 0 \Leftrightarrow (m + 1)x > m^2 - m - 12$

Xét m = –1 thì 0x > –10: nghiệm là mọi x (loại)

Xét m < –1 thì $x < \frac{m^2 - m - 12}{m + 1}$: loại

Xét m > –1 thì $x > \frac{m^2 - m - 12}{m + 1}$

Điều kiện BPT có tập nghiệm $\mathbf{R^+}$ là $m^2 - m - 12 = 0$

$\Leftrightarrow$ m = –3 hoặc m = 4. Chọn m = –3.

Ví dụ 7: Tìm a **sao cho hai bất phương trình sau đây là tương đương:**

$(a - 1)x - a + 3 > 0$ (1) và $(a + 1)x - a + 2 > 0$ (2)

Giải

Ta có (1) $\Leftrightarrow$ **$(a - 1)x > a - 3$** và (2) $\Leftrightarrow$ **$(a + 1)x > a - 2$**

Xét 5 trường hợp sau:

Nếu a < –1: **(1)** $\Leftrightarrow$ **$x < \frac{a-3}{a-1}$** và **(2)** $\Leftrightarrow x < \frac{a-2}{a+1}$

Điều kiện tương đương: $\frac{a-3}{a-1} = \frac{a-2}{a+1}$

$\Leftrightarrow a^2 - 2a - 3 = a^2 - 3a + 2 \Leftrightarrow a = 5$ (loại)

Nếu a = –1: (1) $\Leftrightarrow -2x > -4 \Leftrightarrow x < 2$

(2) $\Leftrightarrow$ 0. x > –3: đúng với mọi x: không tương đương

Nếu –1 < a < 1: (1) $\Leftrightarrow x < \frac{a-3}{a-1}$ và (2) $\Leftrightarrow x > \frac{a-2}{a+1}$

Rõ ràng hai BPT không tương đương

Nếu a = 1: (1) $\Leftrightarrow$ 0. x > –2: đúng với mọi x

(2) $\Leftrightarrow 2x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$: không tương đương

Nếu a > 1: (1) $\Leftrightarrow x > \frac{a-3}{a-1}$ và (2) $\Leftrightarrow x > \frac{a-2}{a+1}$

Điều kiện tương đương: $\frac{a-3}{a-1} = \frac{a-2}{a+1} \Leftrightarrow a = 5$ (chọn). Vậy a = 5

Ví dụ 8: Tìm m trong mỗi trường hợp:

a) $(m + 2)x + 5 - 2m > 0, \forall x \in [1; 3]$

b) $mx - 3 - x + 4m \geq 0, \forall x > 2$

Giải

a) Đặt $y = f(x) = (m + 2)x + 5 - 2m$ thì y có đồ thị là đường thẳng d.

Gọi A, B là hai điểm thuộc đường thẳng d có hoành độ $x = 1, x = 3$. Điều kiện $f(x) > 0, \forall x \in [1 ; 3]$ là đoạn AB nằm phía trên trục hoành tức là 2 mút A, B ở phía trên trục hoành:

$$\begin{cases} f(1) > 0 \\ f(3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 + 5 - 2m > 0 \\ 3m + 6 + 5 - 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 7 \\ m > -11 \end{cases}$$. Vậy $-11 < m < 7$.

b) Viết lại: $(m - 1)x + 4m - 3 \geq 0, \forall x > 2$

Đặt $y = f(x) = (m - 1)x + 4m - 3$ có hệ số góc $a = m - 1$.

Xét $m = 1$ thì $y = 1 \geq 0, \forall x > 2$: đúng

Xét $m \neq 1$ thì $f(x) \geq 0, \forall x > 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 > 0 \\ f(2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ 2m - 2 + 4m - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \geq \dfrac{5}{6} \end{cases}$$. Vậy: $m \geq 1$.

DẠNG 3: HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

• Phương pháp giải hệ bất phương trình bậc nhất:

– Giải riêng từng bất phương trình của hệ.

– Tìm giao các tập nghiệm

Chú ý: Có thể kết hợp khi giải.

– Minh hoạ trục số.

– Bài toán điều kiện có nghiệm, vô nghiệm thì xem xét đủ các trường hợp có thể xảy ra.

$$\begin{cases} x > A \\ x > B \end{cases} \Leftrightarrow x > \max\{A,B\} \; ; \; \begin{cases} x < A \\ x < B \end{cases} \Leftrightarrow x < \min\{A,B\}$$

$$\max\{A,B\} = \frac{A + B + |A - B|}{2} \qquad \min\{A,B\} = \frac{A + B - |A - B|}{2}$$

Ví dụ 1: Giải các hệ bất phương trình:

a) $\begin{cases} 5x - 2 > 4x + 5 \\ 5x - 4 < x + 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 1 > 3x + 4 \\ 5x + 3 \geq 8x - 9 \end{cases}$

Giải

a) $\begin{cases} 5x - 2 > 4x + 5 \\ 5x - 4 < x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 7 \\ 4x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 7 \\ x < \dfrac{3}{2} \end{cases}$: vô nghiệm. $S = \varnothing$

b) $\begin{cases} 2x + 1 > 3x + 4 \\ 5x + 3 \geq 8x - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ 3x \leq 12 \end{cases} \Leftrightarrow x < -3$. Vậy $S = (-\infty; -3)$

Ví dụ 2: Giải các hệ bất phương trình:

a) $\begin{cases} \dfrac{4x-5}{7} < x+3 \\ \dfrac{3x+8}{4} > 2x-5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (1-x)^2 > 5+3x+x^2 \\ (x+2)^2 < x^3+6x^2-7x-5 \end{cases}$

Giải

a) $\begin{cases} \dfrac{4x-5}{7} < x+3 \\ \dfrac{3x+8}{4} > 2x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-5 < 7x+21 \\ 3x+8 > 8x-20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x > -26 \\ 5x < 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{26}{3} \\ x < \dfrac{28}{5} \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{26}{3} < x < \dfrac{28}{5}$

b) $\begin{cases} (1-x)^2 > 5+3x+x^2 \\ (x+2)^2 < x^3+6x^2-7x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x+x^2 > 5+3x+x^2 \\ x^3+6x^2+12x+8 < x^3+6x^2-7x-5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x < -4 \\ 19x < -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\dfrac{4}{5} \\ x < -\dfrac{13}{19} \end{cases} \Leftrightarrow x < -\dfrac{4}{5}$

Ví dụ 3: Tìm m để mỗi hệ có nghiệm:

a) $\begin{cases} 3x-2 > -4x+5 \\ 3x+m+2 < 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2 \le 0 \\ m+x > 1 \end{cases}$

Giải

a) $\begin{cases} 3x-2 > -4x+5 \\ 3x+m+2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -\dfrac{m+2}{3} \end{cases}$

Hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$-\dfrac{m+2}{3} > 1 \Leftrightarrow m + 2 < -3 \Leftrightarrow m < -5$

b) $\begin{cases} x-2 \le 0 \\ m+x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2 \\ x > 1-m \end{cases}$

Hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi: $1 - m < 2 \Leftrightarrow m > -1$.

Ví dụ 4: Tìm m để mỗi hệ vô nghiệm:

a) $\begin{cases} 2x+7 < 8x-1 \\ -2x+m+5 \ge 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (x-3)^2 \ge x^2+7x+1 \\ 2m-5x \le 8 \end{cases}$

Giải

a) $\begin{cases} 2x+7 < 8x-1 \\ -2x+m+5 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{4}{3} \\ x \le \dfrac{m+5}{2} \end{cases}$

Hệ bất phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi:

$$\frac{m+5}{2} \le \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3m+15 \le 8 \Leftrightarrow 3m \le -7 \Leftrightarrow m \le -\frac{7}{3}$$

b) $\begin{cases} (x-3)^2 \ge x^2+7x+1 \\ 2m-5x \le 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x+9 \ge x^2+7x+1 \\ 5x \ge 2m-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \frac{8}{13} \\ x \ge \frac{2m-8}{5} \end{cases}$

Hệ bất phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi:

$$\frac{2m-8}{5} > \frac{8}{13} \Leftrightarrow 26m - 104 > 40 \Leftrightarrow 26m > 144 \Leftrightarrow m > \frac{72}{13}.$$

Ví dụ 5: Tìm m để hệ: a) $\begin{cases} \frac{7}{6}x - \frac{1}{2} > \frac{3x}{2} - \frac{13}{3} \\ m^2x + 1 \ge m^4 - x \end{cases}$ có nghiệm

b) $\begin{cases} x-2 \ge 0 \\ mx-4 \le 0 \end{cases}$ có nghiệm là một đoạn có độ dài bằng 5.

Giải

a) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 7x-3 > 9x-26 \\ (m^2+1)x > m^4-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < 23 \\ (m^2+1)x > (m^2+1)(m^2-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{23}{2} \\ x \ge m^2-1 \end{cases}$.

Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi:

$$m^2 - 1 < \frac{23}{2} \Leftrightarrow m^2 < \frac{25}{2} \Leftrightarrow |m| < \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

b) $\begin{cases} x-2 \ge 0 \\ mx-4 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ mx \le 4 \end{cases}$

Xét m = 0 thì hệ $\begin{cases} x \ge 2 \\ 0x \le 4 \end{cases}$: Có vô số nghiệm (loại)

Xét m < 0 thì hệ $\begin{cases} x \ge 2 \\ x \ge \frac{4}{m} \end{cases}$: Có vô số nghiệm (loại)

Xét m > 0 thì hệ $\begin{cases} x \ge 2 \\ x \le \frac{4}{m} \end{cases}$ Điều kiện hệ có nghiệm là 1 đoạn có độ dài là 5 là:

$$\frac{4}{m} - 2 = 5 \Leftrightarrow \frac{4}{m} = 7 \Leftrightarrow m = \frac{4}{7} \text{ (chọn)}$$

Ví dụ 6: Tìm m để hệ bất phương trình sau có một nghiệm duy nhất:

$\begin{cases} x-2m+1 \ge 0 & (1) \\ mx+m-8 \le & (2) \end{cases}$

ABC

Giải

Ta có (1) $\Leftrightarrow x \geq 2m - 1$. Giải (2) ta xét các trường hợp sau:

Nếu $m = 0$ thì (2) $\Leftrightarrow 0x \leq 8$: đúng, $\forall x$ nên hệ không có nghiệm duy nhất.

Nếu $m < 0$ thì (2) $\Leftrightarrow x \geq \dfrac{8-m}{m}$: Hệ không có nghiệm duy nhất.

Nếu $m > 0$ thì (2) $\Leftrightarrow x \leq \dfrac{8-m}{m}$

Do đó hệ có một nghiệm duy nhất khi và chỉ khi:

$$2m - 1 = \frac{8-m}{m} \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2. \text{ Chọn } m = 2.$$

Ví dụ 7: Tìm nghiệm nguyên của hệ:

a) $\begin{cases} 6x + \dfrac{5}{7} > 4x + 7 \\ \dfrac{8x+3}{2} < 2x + 25 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 15x - 2 > 2x + \dfrac{1}{3} \\ 2(x-4) < \dfrac{3x-14}{2} \end{cases}$

Giải

a) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 42x + 5 > 28x + 49 \\ 8x + 3 < 4x + 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x > 44 \\ 4x < 47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{22}{7} \\ x < \dfrac{47}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{22}{7} < x < \dfrac{47}{4}$.

Vì x nguyên nên chọn x = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.

b) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 13x > \dfrac{7}{3} \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{7}{39} \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{7}{39} < x < 2$

Vì x nguyên nên chọn x = 1.

DẠNG 4: DẤU NHỊ THỨC BẬC NHẤT

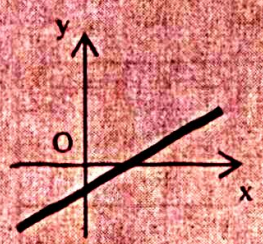
– Xét dấu nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$:

Cho $f(x) = ax + b \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{a}$

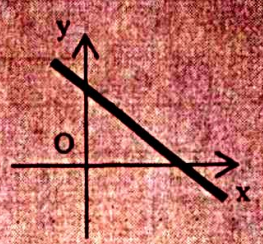
Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-b/a$	$+\infty$
f(x)	trái dấu a	0	cùng dấu a

– Đồ thị hàm số bậc nhất $y = ax + b$, $a \neq 0$:



a > 0



a < 0

• Ứng dụng:

– Giải bất phương trình tích:

Đưa bất phương trình về dạng $A(x).B(x) > 0$; $A(x).B(x) \geq 0$, $A(x).B(x).C(x) < 0$, . . . Sắp xếp các nghiệm của các nhị thức $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, . . . theo thứ tự tăng dần. Lập bảng xét dấu để chọn miền nghiệm thích hợp.

– Giải bất phương trình chứa ẩn ở mẫu:

Đưa bất phương trình về dạng $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0, \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0, \frac{P(x)}{Q(x)} < 0, \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$ trong đó $P(x)$, $Q(x)$ là tích các nhị thức bậc nhất. Sắp xếp các nghiệm của các nhị thức theo thứ tự tăng dần, lập bảng xét dấu để chọn miền nghiệm thích hợp. Chú ý, trong hàng cuối dùng dấu || để chỉ các nghiệm của mẫu thức $Q(x) = 0$ làm bất phương trình không xác định.

– Giải phương trình, bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối:

Dùng định nghĩa, chia miền xét dấu, bình phương có điều kiện:

$$|A| = \begin{cases} A, \text{khi} A \geq 0 \\ -A, \text{khi} A < 0 \end{cases}; |A| = A \Leftrightarrow A \geq 0 ; |A| = -A \Leftrightarrow A \leq 0$$

$$|A| < B \Leftrightarrow \begin{cases} B > 0 \\ -B < A < B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B > 0 \\ A^2 < B^2 \end{cases}$$

$$|A| > B \Leftrightarrow \begin{cases} B \leq 0 \\ B \geq 0, A < -B \text{ hay } A > B \end{cases}$$

$$|A| + |B| = |A + B| \Leftrightarrow A.B \geq 0$$

$$|A| + |B| = |A - B| \Leftrightarrow A.B \leq 0$$

Ví dụ 1: Lập bảng xét dấu các biểu thức:

a) $f(x) = (-2x + 3)(x - 2)(x + 4)$ b) $f(x) = x(x - 2)^2(3 - x)$

Giải

a) Cho $-2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$, $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-4		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$-2x + 3$	+		+		0	–		–	
$x - 2$	–		–			–	0	+	
$x + 4$	–	0	+			+		+	
$f(x)$	+	0	–		0	+	0	–	

b) Cho $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$; $3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
x		–	0	+		+		+	
$(x - 2)^2$		+		+	0	+		+	
$3 - x$		+		+		+	0	–	
$x(x - 2)^2(3 - x)$		–	0	+	0	+	0	–	

Ví dụ 2 Lập bảng xét dấu:

a) $f(x) = \dfrac{4-3x}{2x+1}$ b) $f(x) = \dfrac{x(x-3)^2}{(x-5)(1-x)}$

Giải

a) ĐK: $x \neq -\dfrac{1}{2}$. Cho $4 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$4-3x$	+		+		0	–	
$2x+1$	–		0	+		+	
$\frac{4-3x}{2x+1}$	–		‖	+	0	–	

b) ĐK: $x \neq 5$; $x \neq 1$. Cho $x(x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 3$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		1		3		5		$+\infty$
x	–		0	+	‖	+		+			+
$(x-3)^2$	+		‖	+		+	0	+			+
$x-5$	–		‖	–		–		–	0		+
$1-x$	+		‖	+	0	–		–	‖		–
$f(x)$	+		0	–	‖	+	0	+	‖		–

Ví dụ 3 Phân tích rồi xét dấu:

a) $f(x) = -x^2 + x + 6$ b) $g(x) = 2x^2 - (2+\sqrt{3})x + \sqrt{3}$

Giải

a) Cho $-x^2 + x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ hoặc $x = 3$. Do đó:

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = -(x+2)(x-3) = (x+2)(3-x)$

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$x+2$	–		0	+	‖	+	
$3-x$	+		‖	+	0	–	
$f(x)$	–		0	+	0	–	

b) Vì $a - b + c = 0$ nên: $2x^2 - (2+\sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Do đó $g(x) = 2(x-1)\left(x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = (x-1)(2x - \sqrt{3})$

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1		$+\infty$
$x-1$	–		‖	–	0	+	
$2x-\sqrt{3}$	–		0	+	‖	+	
$g(x)$	+		0	–	0	+	

Ví dụ 4: Giải các bất phương trình:

a) $\frac{(3-x)(x-2)}{x+1} \le 0$ b) $\frac{3}{1-x} \ge \frac{5}{2x+1}$

Giải

a) ĐK: $x \ne -1$. Cho $(3 - x)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ hoặc $x = 2$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$3 - x$	+		+		+		0		−
$x - 2$	−		−		0		+		+
$x + 1$	−		0		+		+		+
$\frac{(3-x)(x-2)}{x+1}$	+		−		0		+		0	−

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S = (-1 ; 2] \cup [3 ; +\infty)$

b) ĐK: $x \ne 1, x \ne -\frac{1}{2}$

$$\frac{3}{1-x} \ge \frac{5}{2x+1} \Leftrightarrow \frac{3(2x+1)-5(1-x)}{(1-x)(2x+1)} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{11x-2}{(1-x)(2x+1)} \ge 0$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{2}{11}$		1		$+\infty$
$11x - 2$	−		−		0	+			+
$1 - x$	+		+		+		0		−
$2x + 1$	−	0	+		+		+		+
VT	+		−		0	+			−

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S = \left(-\infty;-\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{2}{11};1\right)$

Ví dụ 5: Giải các bất phương trình:

a) $(-\sqrt{3}x + 2)(x + 1)(4x - 5) > 0$ b) $\frac{x+2}{3x+1} \le \frac{x-2}{2x-1}$

Giải

a) Cho $(-\sqrt{3}x + 2)(x + 1)(4x - 5) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ hoặc $x = -1$ hoặc $x = \frac{5}{4}$.

BXD:

x	$-\infty$		-1		$\frac{2}{\sqrt{3}}$		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$-\sqrt{3}x + 2$	+		+		0	−			−
$x + 1$	−	0	+		+		+		+
$4x - 5$	−		−		−		0		+
f(x)	+	0	−	0	+		0		−

ABC

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = (-\infty ; -1) \cup \left(\frac{2}{\sqrt{3}};\frac{5}{4}\right)$

b) $\frac{x+2}{3x+1} \le \frac{x-2}{2x-1} \Leftrightarrow \frac{(x+2)(2x-1)-(x-2)(3x+1)}{(3x+1)(2x-1)} \le 0$

$\Leftrightarrow \frac{-x^2+8x}{(3x+1)(2x-1)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-8)}{(3x+1)(2x-1)} \ge 0$

Lập bảng xét dấu vế trái:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$\frac{1}{2}$		8		$+\infty$
x	$-$		$-$		0	$+$		$+$		$+$	
$x-8$	$-$		$-$		$-$		$-$		0	$+$	
$3x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		
$2x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		
$\frac{x(x-8)}{(3x+1)(2x-1)}$	$+$		$-$		0	$+$			$-$	0	$+$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = \left(-\infty;-\frac{1}{3}\right) \cup \left[0;\frac{1}{2}\right) \cup [8;+\infty)$

Ví dụ 6: Giải các hệ bất phương trình:

a) $\begin{cases} (x-3)(\sqrt{2}-x) > 0 \\ \frac{4x-3}{2} < x+3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{2}{2x-1} \le \frac{1}{3-x} \\ |x| < 1 \end{cases}$

Giải

a) Lập bảng xét dấu vế trái của bất phương trình đầu ta được

$(x-3)(\sqrt{2}-x) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} < x < 3$

Ta có $\frac{4x-3}{2} < x+3 \Leftrightarrow 4x-3 < 2x+6 \Leftrightarrow x < \frac{9}{2}$

Kết hợp thì tập nghiệm là: $S = (\sqrt{2} ; 3)$

b) Ta có $\frac{2}{2x-1} \le \frac{1}{3-x} \Leftrightarrow \frac{-4x+7}{(2x-1)(3-x)} \le 0$.

Lập bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{7}{4}$		3		$+\infty$
$-4x+7$	$+$		$+$		0	$-$		$-$	
$2x-1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		
$3-x$	$+$		$+$		$+$		0	$-$	
VT	$-$		$+$		0	$-$		$+$	

Chọn nghiệm $x < \frac{1}{2}$ hoặc $\frac{7}{4} \le x < 3$

Do đó hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \text{ hay } \frac{7}{4} \le x < 3 \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < \frac{1}{2}$. Vậy $S = \left(-1 ; \frac{1}{2}\right)$

Ví dụ 7: Giải các bất phương trình:

a) $\frac{|2x-1|}{(x+1)(x-2)} > \frac{1}{2}$ b) $|2x - \sqrt{2}| + |\sqrt{2} - x| > 3x - 2$

Giải

a) ĐK: $x \neq -1$; $x \neq 2$. Ta xét hai trường hợp:

Nếu $x \le \frac{1}{2}$ thì bất phương trình trở thành:

$$\frac{-2x+1}{(x+1)(x-2)} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2(-2x+1)-(x+1)(x-2)}{2(x+1)(x-2)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2-3x+4}{2(x+1)(x-2)} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+4)}{2(x+1)(x-2)} < 0$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-4		-1		$\frac{1}{2}$
$x-1$	$-$		$-$		$-$		$-$
$x+4$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$		$-$
VT	$+$	0	$-$		$+$		

Do đó tập nghiệm là khoảng $(-4 ; -1)$

Nếu $x > \frac{1}{2}$ thì bất phương trình trở thành:

$$\frac{2x-1}{(x+1)(x-2)} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2(2x+1)-(x+1)(x-2)}{2(x+1)(x-2)} > 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-5)}{2(x+1)(x-2)} < 0.$$

Bảng xét dấu:

x	$\frac{1}{2}$		2		5		$+\infty$
x	$+$		$+$		$+$		$+$
$x-5$	$-$		$-$		0	$+$	
$x+1$	$+$		$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
VT	$+$		$-$		0	$+$	

Do đó tập nghiệm là khoảng $(2 ; 5)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S = (-4 ; -1) \cup (2 ; 5)$.

b) Cho $2x-\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt{2}-x=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{2}$.

Ta xét 3 trường hợp:

Nếu $x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ thì $2x-\sqrt{2}<0$, $\sqrt{2}-x>0$

BPT $\Leftrightarrow -3x+2\sqrt{2}x>3x-2 \Leftrightarrow x<\frac{1+\sqrt{2}}{3}$. Chọn nghiệm $x<\frac{\sqrt{2}}{2}$

Nếu $\frac{\sqrt{2}}{2}\le x\le\sqrt{2} \Leftrightarrow 2x-\sqrt{2}\ge 0$, $\sqrt{2}-x\ge 0$

BPT $\Leftrightarrow x>3x-2 \Leftrightarrow x<1$. Chọn nghiệm $\frac{\sqrt{2}}{2}\le x<1$.

Nếu $x>\sqrt{2}$ thì $2x-\sqrt{2}>0$, $\sqrt{2}-x<0$

BPT $\Leftrightarrow 0.x>2\sqrt{2}-2$: Vô nghiệm

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S=\left(-\infty;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right)=(-\infty;1)$

Ví dụ 8: Giải và biện luận bất phương trình:

a) $(2x-\sqrt{2})(x-m)>0$ b) $\frac{\sqrt{3}-x}{x-2m+1}\le 0$

Giải

a) Cho $(2x-\sqrt{2})(x-m)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ hoặc $x=m$

Xét 3 trường hợp:

– Nếu $m<\frac{\sqrt{2}}{2}$ thì ta có bảng sau:

x	$-\infty$		m		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$x-\frac{\sqrt{2}}{2}$	–		–	0	+	
$x-m$	–	0	+		+	
VT	+	0	–	0	+	

Do đó tập nghiệm là $S=(-\infty;m)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$

– Nếu $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$ thì BPT $\Leftrightarrow \sqrt{2}(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2>0 \Leftrightarrow x\ne\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $S = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

– Nếu $m > \frac{\sqrt{2}}{2}$ thì có bảng sau:

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		m		$+\infty$
$x - \frac{\sqrt{2}}{2}$		–	0	+		+	
x – m	–			–	0	+	
VT	+		0	–	0	+	

Do đó tập nghiệm là $S = \left(-\infty; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup (m; +\infty)$

b) ĐK: $x \neq 2m - 1$. Cho $\sqrt{3} - x = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$

– Nếu $2m - 1 < \sqrt{3} \Leftrightarrow m < \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ thì ta có bảng sau:

x	$-\infty$		2m – 1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$\sqrt{3} - x$		+		+	0	–	
x – 2m + 1		–	0	+		+	
VT		–		+	0	–	

Do đó tập nghiệm là $S = (-\infty ; 2m - 1) \cup [\sqrt{3} ; +\infty)$

– Nếu $2m - 1 = \sqrt{3} \Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ thì

BPT: $\frac{\sqrt{3}-x}{x-\sqrt{3}} \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq 0, x \neq \sqrt{3} \Leftrightarrow x \neq \sqrt{3}$.

Vậy $S = \mathbf{R} \setminus \{\sqrt{3}\}$.

– Nếu $2m - 1 > \sqrt{3} \Leftrightarrow m > \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ thì ta có bảng sau:

x	$-\infty$		$\sqrt{3}$		2m – 1		$+\infty$
$\sqrt{3} - x$		+	0	–		–	
x – 2m + 1		–		–	0	+	
VT		–	0	+		–	

Do đó tập nghiệm là $S = (-\infty ; \sqrt{3}] \cup (2m - 1; +\infty)$

Ví dụ 9: Giải và biện luận tuỳ theo m hệ bất phương trình:

a) $\begin{cases} mx - 1 > 0 & (1) \\ (3m-2)x - m > 0 & (2) \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{2}{x-1} < \dfrac{5}{2x-1} \\ x - m \geq 0 \end{cases}$

Giải

a) Khi m = 0, (1) vô nghiệm nên hệ vô nghiệm.

Khi m = $\frac{2}{3}$, (2) vô nghiệm nên hệ vô nghiệm.

Khi m ≠ 0 và m ≠ $\frac{2}{3}$. Tuỳ theo giá trị của m, **(1) có nghiệm x > $\frac{1}{m}$ hoặc có** nghiệm x < $\frac{1}{m}$, (2) có nghiệm x > $\frac{m}{3m-2}$ **hoặc có nghiệm x < $\frac{m}{3m-2}$.**

Ta so sánh $\frac{1}{m}$ và $\frac{m}{3m-2}$ bằng cách lập hiệu **và xét dấu:**

$D = \frac{m}{3m-2} - \frac{1}{m} = \frac{(m-1)(m-2)}{m(3m-2)}$.

m	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		1		2	$+\infty$
D	+		−		+	0	−	0	+	

Từ đó, có các trường hợp:

– Nếu m < 0: (1) ⇔ x < $\frac{1}{m}$ và (2) ⇔ x < $\frac{m}{3m-2}$ mà $\frac{m}{3m-2} > \frac{1}{m}$, nên ta có nghiệm x < $\frac{1}{m}$.

Vậy S = $(-\infty ; \frac{1}{m})$

– Nếu 0 < m < $\frac{2}{3}$: (1) ⇔ x > $\frac{1}{m}$ và (2) ⇔ x < $\frac{m}{3m-2}$ mà $\frac{m}{3m-2} < \frac{1}{m}$, nên hệ bất phương trình vô nghiệm.

– Nếu $\frac{2}{3}$ < m < 1: (1) ⇔ x > $\frac{1}{m}$ và (2) ⇔ x > $\frac{m}{3m-2}$ mà $\frac{m}{3m-2} > \frac{1}{m}$, nên ta có nghiệm x > $\frac{m}{3m-2}$

Vậy S = $\left(\frac{m}{3m+2}; +\infty\right)$

– Nếu 1 ≤ m ≤ 2: (1) ⇔ x > $\frac{1}{m}$ và (2) ⇔ x > $\frac{m}{3m-2}$ mà $\frac{m}{3m-2} < \frac{1}{m}$, nên ta có nghiệm x > $\frac{1}{m}$

Vậy S = $\left(\frac{1}{m}; +\infty\right)$

– Nếu $m > 2$: (1) $\Leftrightarrow x > \frac{1}{m}$ và (2) $\Leftrightarrow x > \frac{m}{3m-2}$ mà $\frac{m}{3m-2} > \frac{1}{m}$, nên ta có nghiệm $x > \frac{m}{3m-2}$

Vậy $S = \left(\frac{m}{3m+2}; +\infty\right)$

b) Ta có $\frac{2}{x-1} < \frac{5}{2x-1} \Leftrightarrow \frac{2(2x-1)-5(x-1)}{(x-1)(2x-1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{(x-1)(2x-1)} > 0$

Lập bảng xét dấu vế trái thì có nghiệm $\frac{1}{2} < x < 1$ hoặc $x > 3$

và $x - m \geq 0 \Leftrightarrow x \geq m$. So sánh m với số $\frac{1}{2}$; 1 ; 3, ta có:

Nếu $m \leq \frac{1}{2}$ thì tập nghiệm là $S = \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (3 ; +\infty)$

Nếu $\frac{1}{2} < m < 1$ thì tập nghiệm là $S = [m ; 1) \cup (3 ; +\infty)$

Nếu $1 \leq m \leq 3$ thì tập nghiệm là $S = (3 ; +\infty)$

Nếu $m > 3$ thì tập nghiệm là $S = [m ; +\infty)$

Ví dụ 10: Tìm m để hệ bất phương trình: $\begin{cases} \frac{x-3}{x-4} \leq 0 \\ 3x - m \leq 1 \end{cases}$

a) Vô nghiệm b) Có một nghiệm duy nhất

Giải

Bằng cách lập bảng xét dấu thì $\frac{x-3}{x-4} \leq 0 \Leftrightarrow 3 \leq x < 4$,

do đó hệ bất phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x < 4 \\ x \leq \frac{m+1}{3} \end{cases}$

a) Hệ vô nghiệm khi $\frac{m+1}{3} < 3 \Leftrightarrow m < 8$

b) Hệ có một nghiệm duy nhất khi $\frac{m+1}{3} = 3 \Leftrightarrow m = 8$

C. BÀI LUYỆN TẬP

1. Tìm điều kiện xác định của bất phương trình:

a) $2x - 1 > \sqrt{x+2}$ b) $|x + 1| - 2x + 7 \leq 0$

c) $\frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{x-3} < 5$ d) $\sqrt{\frac{x+2}{x-1}} < 5x - 1 + |x - 2|$

ĐS: a) $x \geq -2$ b) mọi x

ABC

2. Tìm điều kiện xác định rồi suy ra tập nghiệm của bất phương trình:

a) $\sqrt{x-2} > \sqrt{2-x}$ b) $\sqrt{x+3} < 1+\sqrt{x+3}$

c) $\frac{x}{\sqrt{x-2}} > \frac{2}{\sqrt{x-2}}$ d) $\sqrt{1+2(x+1)^2} + \sqrt{10-6x+x^2} < 2$

ĐS: c) $x > 2$ d) vô nghiệm

3. Xét quan hệ tương đương:

a) (1) $\sqrt{x-2} > \sqrt{2x-3}$ (2): $x-2>2x-3$ b) (1):$x-2 \geq 0$ (2): $x^2(x-2) \geq 0$

c) (1): $x-2<0$ (2): $x^2(x-2)<0$ d) (1): $x-2>0$ (2): $x^2(x-2)>0$

ĐS: c) không tương đương d) tương đương

4. Tìm điều kiện để 2 bất phương trình tương đương:

a) (1): $x^2(x-m)>0$ (2): $x-m>0$

b) (1): $5x+3\geq 0$ (2): $5x+3+\frac{1}{x-a} \geq \frac{1}{x-a}$

ĐS: a) $m > 0$ b) $a < -\frac{3}{5}$

5. Giải các bất phương trình sau:

a) $4x-3 > -8+5x$ b) $\sqrt{6-7x} > \sqrt{2}$

c) $|6x+1| < 3$ d) $|5-2x| \geq 8$

6. Giải các bất phương trình:

a) $\frac{1}{x-2} > 2$ b) $\frac{x-1}{2+x} \geq 0$

c) $(x+2)\sqrt{x+4}.\sqrt{x+6} \geq 0$ d) $x^2 - x + 3 \geq 0$

7. Giải và biện luận các bất phương trình:

a) $\frac{(m-3)x}{2m} > \frac{1-x}{2} - \frac{x-1}{m}$ b) $\sqrt{x-1}(x-m+2) > 0$

c) $\frac{mx+1}{m+1} < \frac{mx-1}{m-1}, (m \neq \pm 1)$ d) $x+1 > \frac{a}{b}x + \frac{b}{a}, (a,b>0)$

8. Giải và biện luận:

a) $3x+m^2 \geq m(x+3)$ b) $m^2x^2 < (x+1)^2$

c) $ax + a > bx + b$ d) $\frac{x-ab}{a+b} + \frac{x-bc}{b+c} + \frac{x-ca}{c+a} \geq a+b+c$

HD: chuyển x về một bên, số một bên

9. Định m để hai bất phương trình tương đương:

a) (1): $2x + 7 \geq 0$ và (2): $mx - 6 \leq 0$

b) (1):$mx - m - 1 > 0$ và (2): $(m-2)x + m < 0$

ĐS: b) $m = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$

10. Tìm điều kiện để bất phương trình:

a) $mx - 4m + 5 < x$ vô nghiệm b) $m^2x + 1 \geq m + 4x$ có nghiệm

c) $ax + a^2 > bx + b^2$ có vô số nghiệm

ĐS: a) $m = 1$ c) $a \neq b$

11. Tìm m để bất phương trình:

a) $m(x+1)+m^2x \le 1+m$ có tập nghiệm là **R**

b) $(m+1)x - m^2 + m + 6 > 0$ có tập nghiệm là $\{x \in R / x > 0\}$

c) $(m-2)x + 7 - 6m > 0$ có nghiệm với mọi $x \in [1;3]$

12. Giải hệ bất phương trình:

a) $\begin{cases} 5x+1 > 7-3x \\ 4x-7 \ge 8x+2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 8x-5 > \dfrac{15x-8}{2} \\ 2(2x-3) > 5x - \dfrac{3}{4} \end{cases}$

ĐS: b) vô nghiệm

13. Tìm số x nguyên lớn nhất thoả mãn hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{3x-1}{4} - \dfrac{3(x-2)}{8} - 1 > \dfrac{5-3x}{2} \\ 3 - \dfrac{4x-1}{18} > \dfrac{x-1}{12} - \dfrac{4-5x}{9} \end{cases}$$

ĐS: $x = 4$

14. Giải và biện luận: a) $\begin{cases} 2x-16 < 0 \\ mx \ge 3-x \end{cases}$ b) $\begin{cases} mx-1 > 0 \\ (3m-2)x - m > 0 \end{cases}$

15. Giải và biện luận: $(a-2)x \le a^2 - 2 \le ax$

16. Tìm m để hệ sau:

a) $\begin{cases} 7x-2 > -4x+1 \\ 3x+5m-1 < 0 \end{cases}$ có nghiệm b) $\begin{cases} mx+7 < 8x-1 \\ 2x+3-2m \ge 0 \end{cases}$ vô nghiệm:

17. Tìm m để hệ: $\begin{cases} 3x+5 \le 0 \\ 2mx - 3 \le m \end{cases}$ có nghiệm là 1 đoạn có độ dài bằng 2.

ĐS: $m = -\dfrac{9}{25}$

18. Tìm m để hệ: $\begin{cases} x^2 - 4 \le 0 \\ x - 3 \ge m \end{cases}$ có tập nghiệm S=[1;2]

ĐS: $m = 4$

19. Tìm m để hệ $\begin{cases} x+m^2y \le m \\ m^2x+y \le m \end{cases}$ có nghiệm mà x + y lớn nhất

HD: dùng bất đẳng thức Côsi

20. Tìm m để hệ $\begin{cases} x+my = -m^2 \\ x+3my \le 0 \end{cases}$ có nghiệm mà $x^2 + y^2$ bé nhất

21. Xét dấu:

a) $(2x + 5)(3 - x)$

b) $\dfrac{(x-2)x^2}{(2x+1)(1-3x)}$

22. Phân tích rồi xét dấu:

a) $2x^2 - x + 1$

b) $x^3 - 3x + 2$

c) $(x^2 - 2x + 3)^2 - (x^2 + x - 3)^2$

d) $x^3 + x^2 - 5x + 3$

23. Giải các bất phương trình:

a) $(x^2 + 1)(x^2 - 8) \le 0$

b) $\dfrac{3x-4}{x-2} > 1$

c) $\dfrac{2}{x-1} > \dfrac{5}{2x-1}$

d) $\dfrac{x^2-6x+8}{x^2+8x-9} > 0$

HD: b) và c) chuyển vế rồi xét dấu

24. Giải các bất phương trình:

a) $\dfrac{x^2+4x+5}{x-1} \ge x+3$

b) $\dfrac{3x}{x-2} \le -x$

c) $\dfrac{x^2+4x+5}{x+1} \ge x+3$

d) $\dfrac{(x+1)^5(x-1)^2(1-2x)x^3}{(1-x)^2(x+2)^3} \ge 0$

ĐS: a) $x \le -4$ hoặc $x > 1$

25. Giải bất phương trình:

a) $|2x-5| \le x+1$

b) $|2x+7| \ge |2x-3|$

26. Giải bất phương trình:

a) $|2-|x-3|| > x+7$

b) $|x+2|+|x-2|-3|x+4| \ge 2$

c) $\left|\dfrac{2-x}{x+1}\right| < 2$

d) $\dfrac{|x-3|}{(x-1)(x-2)} > 5$

ĐS: a) $(-\infty;-3)$ b) $(-4;-1) \cup (3;5)$

27. Giải phương trình:

a) $|x + 5| + |x - 2| = 7$

b) $2|x-1| + 5x = |4-x|$

HD: chia miền xét dấu

28. Giải và biện luận:

a) $|2x - 1| = x + m$

b) $|x - m| = x + 3m$

c) $|x - 3| < m + 2$

d) $|5+2x| \ge 1-3m$

29. Giải và biện luận bất phương trình:

a) $mx + 9 > 3x + m^2$

b) $x(m^2 - 4) < m^3 - 8$

c) $\dfrac{mx-1}{x-m} \le 1$

d) $\dfrac{mx+1}{m+1} < \dfrac{mx-1}{m-1}, (m \ne \pm 1)$

30. Tìm m để bất phương trình sau vô nghiệm

a) $m^2x + 4m - 3 < x + m^2$

b) $m^2x + 1 \ge m + (3m-2)x$

c) $\dfrac{(2m-1)x+3-m}{\sqrt{x-1}} \ge 0$

ĐS: a) $m = 1$ b) $m = 2$

31. Giải các hệ bất phương trình:

a) $\begin{cases} \dfrac{2x+3}{x-1} \geq 1 \\ \dfrac{(x+2)(2x-4)}{x-1} < 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{5x}{x-2} \leq \dfrac{1}{2} \\ \left|\dfrac{x-3}{x-1}\right| \leq 1 \end{cases}$

ĐS: a) $x \leq 4,\ 1 < x < 2$ b) vô nghiệm

32. Giải và biện luận:

a) $\begin{cases} \dfrac{2x^2+x-3}{2x^2+1} \leq 0 \\ m(x-m) > 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{(x-4)(x+2)}{x^2-6x+9} \geq 0 \\ mx-1 \geq x+m \end{cases}$

c) $0 \leq \dfrac{2x+m}{x-2} \leq 5$

d) $-1 \leq \dfrac{x+m}{mx+1} \leq 1$

33. Định m để hệ bất phương trình có một nghiệm duy nhất:

a) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{x-2} \leq 0 \\ 4x+1 \leq m \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x^4-x)(x^2+x-20) \leq 0 \\ mx-2 \leq 3m \end{cases}$

34. Định m để hệ bất phương trình vô nghiệm:

a) $\begin{cases} mx+9 < 3x+m^2 \\ 4x+1 < -x+6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x+5 \geq x-1 \\ (x+2)^2 \leq (x-1)^2+9 \\ m^2x+1 > m+(3m-2)x \end{cases}$

ĐS: b) $m = 1$ hoặc $\dfrac{5}{3} \leq m \leq 3$

35. Định m để hệ bất phương trình có nghiệm:

a) $\begin{cases} x+4m^2 \leq 2mx+1 \\ 3x+2 > 2x-1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{-4x+1}{3x+1} < -3 \\ 2x-5 \leq mx+m \end{cases}$

ĐS: a) $m > -2$.

36. Định m để hàm số: $y = \sqrt{mx-2m+1} + \sqrt{2x+m-2}$ xác định khi $x \geq 1$.

ĐS: $0 \leq m \leq 1$

ABC

§3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH - HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

– Bất phương trình bậc nhất hai ẩn là: $ax + by + c > 0$ (hoặc $ax + by + c < 0$, $ax + by + c \geq 0$, $ax + by + c \leq 0$)

trong đó a, b, c là những số cho trước; a, b không đồng thời bằng 0; x, y là các ẩn.

– Mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ sao cho $ax_0 + by_0 + c > 0$ gọi là một nghiệm của bất phương trình $ax + by + c > 0$. Tập nghiệm của bất phương trình trên được biểu diễn bởi một tập hợp điểm của mặt phẳng toạ độ. Tập hợp điểm đó được gọi là miền nghiệm của bất phương trình.

– Miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn là một nửa mặt phẳng.

– Miền nghiệm của một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

– Áp dụng vào bài toán kinh tế

B. PHÂN DẠNG TOÁN

DẠNG 1: BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Để xác định miền nghiệm của bất phương trình: $ax + by + c > 0$:

– Vẽ đường thẳng d: $ax + by + c = 0$ đi qua 2 điểm.

– Xét điểm $M_0(x_0; y_0)$ không thuộc d

Nếu $ax_0 + by_0 + c < 0$ thì nửa mặt phẳng không kể bờ d, chứa điểm M_0 làm miền nghiệm.

Nếu $ax_0 + by_0 + c > 0$ thì nửa mặt phẳng không kể bờ d, không chứa điểm M_0 làm miền nghiệm.

Chú ý:

– Với bất phương trình $ax + by + c \geq 0$, $ax + by + c \geq 0$ thì miền nghiệm là nửa mặt phẳng lấy cả bờ d.

– Nếu gốc O(0; 0) không thuộc d thì chọn điểm gốc để thử dấu, chọn miền nghiệm.

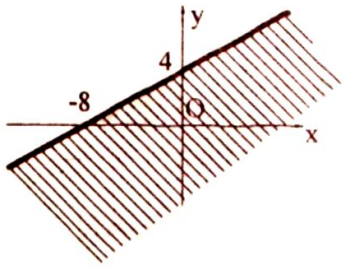
– Ta có thể dùng dấu gạch sọc để gạch bỏ nửa mặt phẳng không phải là miền nghiệm.

Ví dụ 1: Xác định miền nghiệm của bất phương trình hai ẩn:

a) $x - 2 + 2(y - 1) > 2x + 4$ b) $x + 3 + 2(2y + 5) < 2(1 - x)$

Giải

a) $x - 2 + 2(y - 1) > 2x + 4 \Leftrightarrow x - 2y + 8 < 0$.

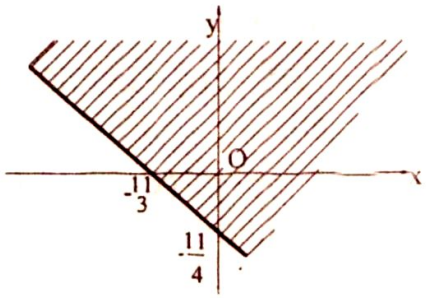


Vẽ đường thẳng d: $x - 2y + 8 = 0$.

Thế $x = y = 0$ thì $x - 2y + 8 = 8 > 0$.

Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng (không kể bờ là đường thẳng d) không chứa gốc toạ độ O.

b) $x + 3 + 2(2y + 5) < 2(1 - x)$



$\Leftrightarrow 3x + 4y + 11 < 0$.

Vẽ đường thẳng d: $3x + 4y + 11 = 0$.

Thế $x = y = 0$ thì $3x + 4y + 11 = 11 > 0$.

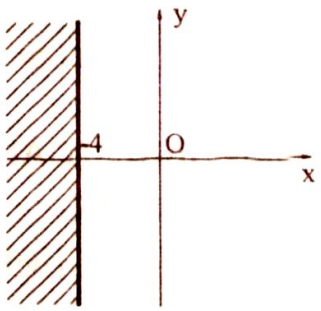
Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng (không kể bờ là đường thẳng d) không chứa gốc O.

Ví dụ 2: Xác định miền nghiệm của bất phương trình hai ẩn:

a) $2x - 3 \geq x + 1$ b) $y + 6 \geq 15 - 2y$

Giải

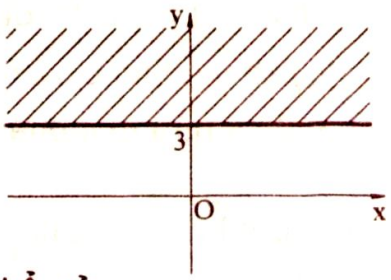
a) $2x - 3 \geq x + 1 \Leftrightarrow x \geq -4$



Vẽ đường thẳng d: $x = -4$.

Miền nghiệm là nửa mặt phẳng kể cả bờ d, phần chứa gốc O.

b) $y + 6 \geq 15 - 2y$



$\Leftrightarrow 3y \geq 9$

$\Leftrightarrow y \geq 3$

Vẽ đường thẳng d: $y = 3$

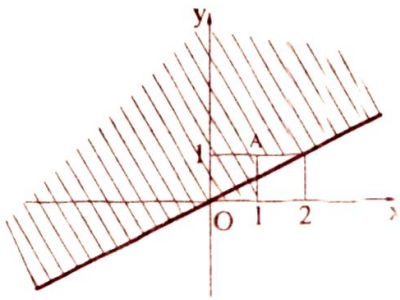
Miền nghiệm là nửa mặt phẳng kể cả bờ d, phần chứa gốc O.

Ví dụ 3: Xác định miền nghiệm của bất phương trình hai ẩn:

a) $x + y + 1 > 3y + 1$ b) $2x - \sqrt{2}y + \sqrt{2} - 2 \geq 0$

Giải

a) $x + y + 1 > 3y + 1 \Leftrightarrow x - 2y > 0$.



Vẽ đường thẳng d: $x - 2y = 0$

Thế $x = y = 1$ thì $x - 2y = 1 - 2 = -1 < 0$

Miền nghiệm là nửa mặt phẳng (không kể bờ d), phần không chứa điểm A(1 ; 1).

b) $2x - \sqrt{2}y + \sqrt{2} - 2 \geq 0$

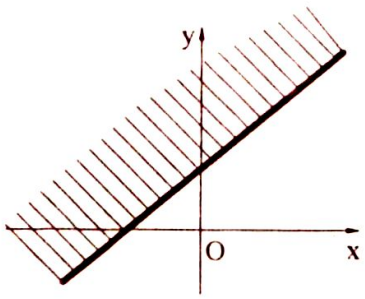
Vẽ đường thẳng d:

$2x - \sqrt{2}y + \sqrt{2} - 2 = 0$

Thế x = y = 0 thì:

$2x - \sqrt{2}y + \sqrt{2} - 2 = \sqrt{2} - 2 < 0$

Vậy miền nghiệm là nửa mặt phẳng (kể cả bờ là đường thẳng d), chứa gốc toạ độ O.



Ví dụ 4: Xác định miền nghiệm của bất phương trình:

a) $4(x - 1) + 5(y - 3) \geq 2x - 9$ b) $x + 3y - 1 < x + y - 1$

Giải

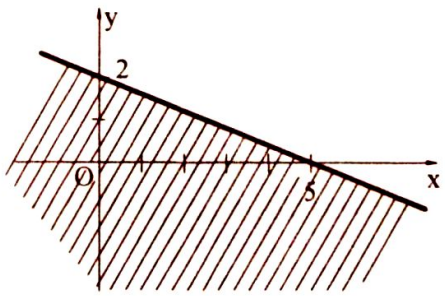
a) BPT $\Leftrightarrow 2x + 5y - 10 > 0$.

Vẽ đường thẳng d: $2x + 5y - 10 = 0$

Thế x = y = 0 thì:

$2x + 5y - 10 = -10 < 0$

Miền nghiệm là nửa mặt phẳng (kể cả bờ d), không chứa gốc O.

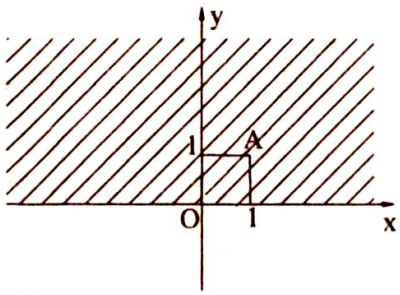


b) BPT $\Leftrightarrow 2y < 0$.

Vẽ đường thẳng d: y = 0 chính là trục hoành.

Thế x = y = 1 thì y = 1 > 0

Miền nghiệm là nửa mặt phẳng (không kể bờ d), phần không chứa điểm A(1 ; 1).



DẠNG 2: HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

• Để tìm miền nghiệm của hệ:

– Với mỗi bất phương trình, ta xác định miền nghiệm và gạch bỏ miền còn lại.

– Miền nghiệm của hệ là miền còn lại không gạch bỏ sau khi giải tất cả bất phương trình của hệ.

Chú ý:

– Dấu = của bất phương trình để lấy bờ tương ứng.

– Ta có thể dùng so sánh vị trí để kiểm tra nhanh, nếu bất phương trình viết dạng:

$y > ax + b$ thì chọn nửa mặt phẳng ở phía trên $y = ax + b$

$y < ax + b$ thì chọn nửa mặt phẳng ở phía dưới $y = ax + b$

$x < c$ thì chọn nửa mặt phẳng ở phía bên phải $x = c$

$x > c$ thì chọn nửa mặt phẳng ở phía bên trái $x = c$

• Bài toán tối ưu (quy hoạch tuyến tính)

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các biểu thức dạng F = ax + by, trong đó x, y nghiệm đúng một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn đã cho:

– Vẽ miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

– Miền nghiệm nhận được thường là một đa giác. Tính giá trị của F ứng với (x ; y) là toạ độ các đỉnh của miền đa giác này rồi so sánh các kết quả từ đó suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

Ví dụ 1: Xác định miền nghiệm của bất phương trình hai ẩn:

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}-1>0 \\ 2(x-1)+\dfrac{y}{2}<4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x-5y+20>0 \\ y>0 \\ -y+5>\dfrac{x-3}{3} \end{cases}$

Giải

a) Hệ đã cho tương đương với hệ:

$\begin{cases} 3x+2y-6>0 \\ 4x+y-12<0 \end{cases}$

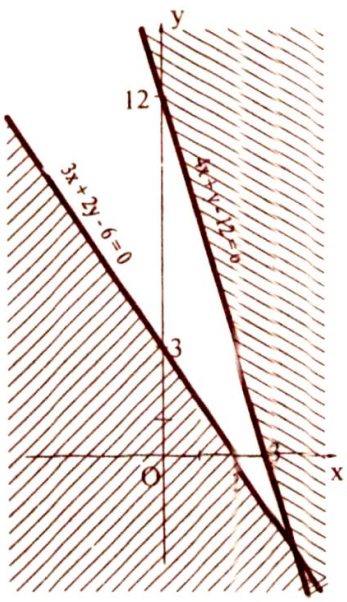
Vẽ đường thẳng 3x + 2y – 6 = 0

Thế x = y = 0 thì 3x + 2y – 6 = –6 < 0

Vẽ đường thẳng 4x + y – 12 = 0

Thế x = y = 0 thì 4x + y – 12 = –12 < 0

Vậy miền nghiệm của hệ là miền không bị gạch (không kể biên) trên hình.



b) Hệ đã cho tương đương với hệ:

$\begin{cases} 4x-5y+20>0 \\ y>0 \\ x+3y-18<0 \end{cases}$

Vẽ đường thẳng:

4x – 5y + 20 = 0

Thế x = y = 0 thì:

4x – 5y + 20 = 20 > 0.

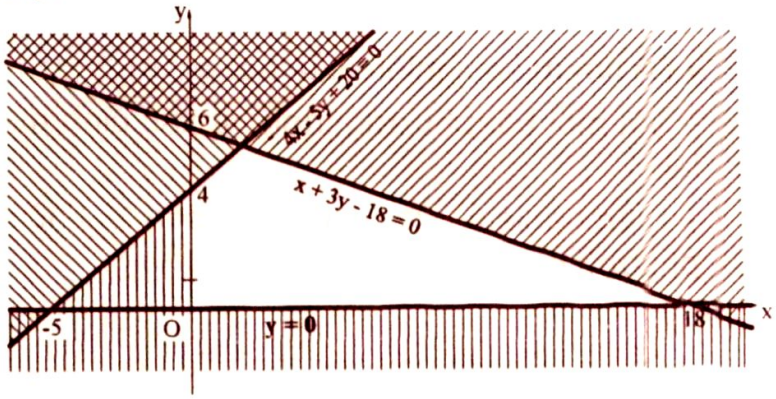
Vẽ đường thẳng y = 0 (trục hoành).

Thế x = 0, y = 4 thì y = 4 > 0

Vẽ đường thẳng x + 3y – 18 = 0.

Thế x = y = 0 thì x + 3y – 18 = –18 < 0.

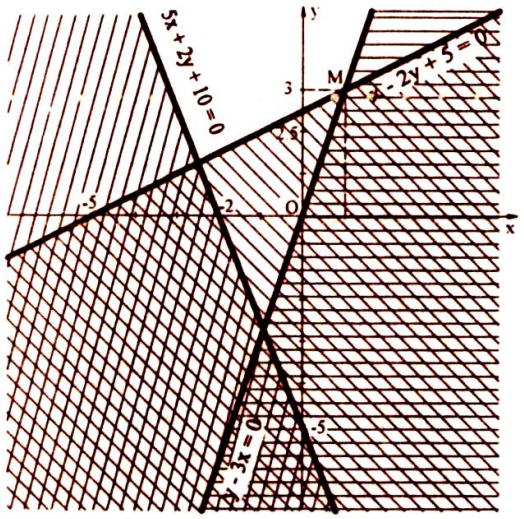
Miền nghiệm của hệ là miền không bị gạch (không kể biên) trên hình.



Ví dụ 2: Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình hai ẩn:

a) $\begin{cases} y - 3x \geq 0 \\ x - 2y + 5 \leq 0 \\ 5x + 2y + 10 \geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + y \geq 9 \\ x \geq y - 3 \\ 2y \geq 8 - x \\ y \leq 6 \end{cases}$

Giải



a) Vẽ đường thẳng $y - 3x = 0$

Thế $x = 0, y = 1$ thì $y - 3x = -3 < 0$

Vẽ đường thẳng $x - 2y + 5 = 0$

thế $x = y = 0$ thì $x - 2y + 5 = 5 > 0$

Vẽ đường thẳng $5x + 2y + 10 = 0$

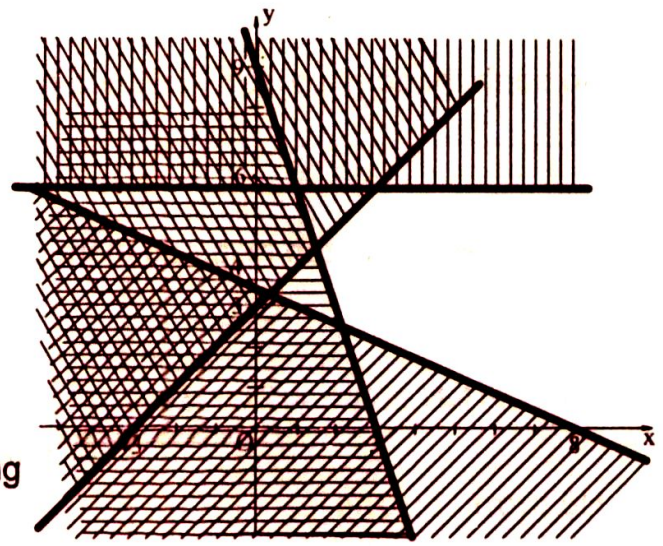
thế $x = y = 0$ thì

$5x + 2y + 10 = 10 > 0$

Miền nghiệm của hệ là miền không bị gạch kể cả biên.

b) Hệ đã cho tương đương với:

$\begin{cases} 3x + y - 9 \geq 0 \\ x - y + 3 \geq 0 \\ x + 2y - 8 \geq 0 \\ y - 6 \leq 0 \end{cases}$



Vẽ lần lượt 4 đường thẳng

$3x + y - 9 = 0, x - y + 3 = 0,$

$x + 2y - 8 = 0$ và $y - 6 = 0$.

Gạch bỏ các nửa mặt phẳng không thoả mãn.

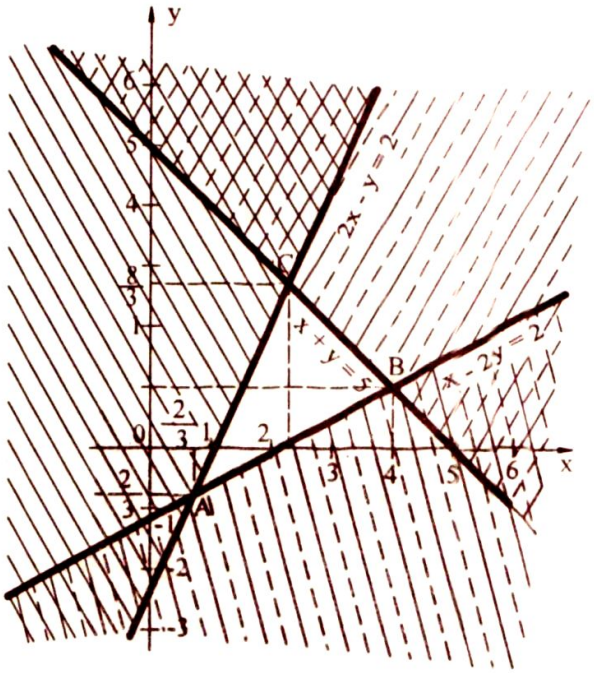
Miền nghiệm là miền không bị gạch bỏ trên mặt phẳng.

Ví dụ 3: Gọi (S) là tập hợp các điểm trong mặt phẳng toạ độ có toạ độ thoả mãn hệ: $\begin{cases} 2x - y \geq 2 \\ x - 2y \leq 2 \\ x + y \leq 5 \\ x \geq 0 \end{cases}$

a) Xác định (S); b) Trong (S), tìm GTLN của $f(x; y) = y - x$

Giải

a) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 2 \geq 0 \\ x - 2y - 2 \leq 0 \\ x + y - 5 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$



Vẽ 4 đường thẳng:

$2x - y - 2 = 0$, $x - 2y - 2 = 0$,

$x + y - 5 = 0$ và $x = 0$.

Gạch bỏ các nửa mặt phẳng không thoả mãn.

Miền nghiệm (S) là miền tam giác ABC (kể cả biên)

b) Các đỉnh lần lượt là giao điểm của 2 trong 3 đường thẳng trên.

Giải ra được $A\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$, $B(4\ ;\ 1)$, $C\left(\frac{7}{3};\frac{8}{3}\right)$

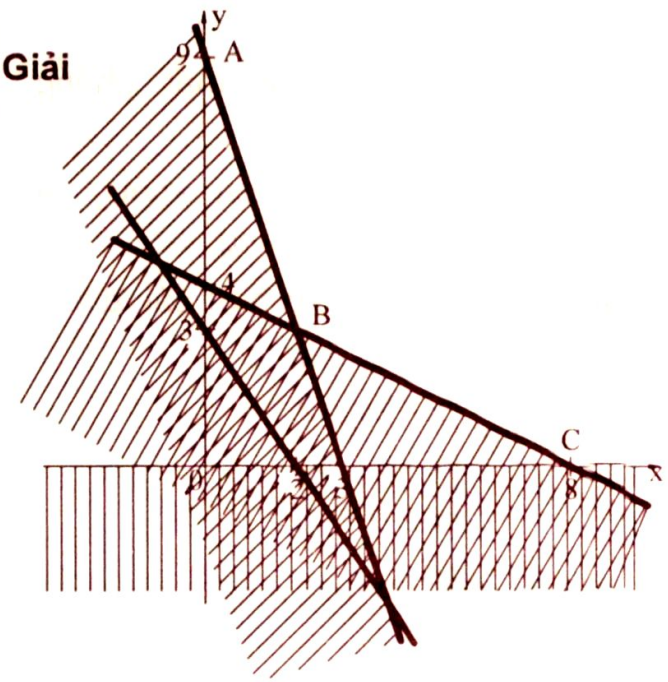
Ta có $f\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}$; $f(4\ ;\ 1) = -3$; $f\left(\frac{7}{3};\frac{8}{3}\right) = \frac{1}{3}$

So sánh thì có giá trị lớn nhất của f(x;y) là $\frac{1}{3}$ đạt được tại C.

Ví dụ 4: Trên (S) là tập hợp các điểm (x ; y) thoả mãn hệ: $\begin{cases} 3x + y \geq 9 \\ x + 2y \geq 8 \\ x + 6y \geq 2 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

Tìm GTNN của $F = 2x + 3y$.

Giải



Hệ tương đương

$\begin{cases} 3x + y - 9 \geq 0 \\ x + 2y - 8 \geq 0 \\ x + 6y - 2 \geq 0 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

Vẽ 5 đường thẳng:

$3x + y - 9 = 0$,

$x + 2y - 8 = 0$,

$x + 6y - 2 = 0$,

$x = 0$ và $y = 0$.

Miền (S) là miền không bị gạch bỏ kể các biên. Ta có các đỉnh A(0; 9), B(2 ; 3), C(8 ; 0) .

Tại A, F = 2.0 + 3.9 = 27

Tại B, F = 2.2 + 3.3 = 13

Tại A, F = 2.8 + 3.0 = 16

Vậy F đạt giá trị nhỏ nhất bằng 13 tại B(2 ; 3)

Ví dụ 5: Một gia đình cần ít nhất 900g chất prôtit và 400g chất lipit trong thức ăn mỗi ngày. Biết rằng thịt bò chứa 80% prôtit và 20% lipit, thịt heo chiếm 60% prôtit và 40% lipit, người ta chỉ mua nhiều nhất 1600g thịt bò, 1100g thịt heo. Giá tiền 1 kg thịt bò 45000đ, giá tiền 1 kg thịt heo 35000đ. Hỏi gia đình này phải mua mỗi loại thịt bao nhiêu để chi phí ít nhất?

Giải

Giả sử gia đình đó mua x (kg) thịt bò và y (kg) thịt lợn.

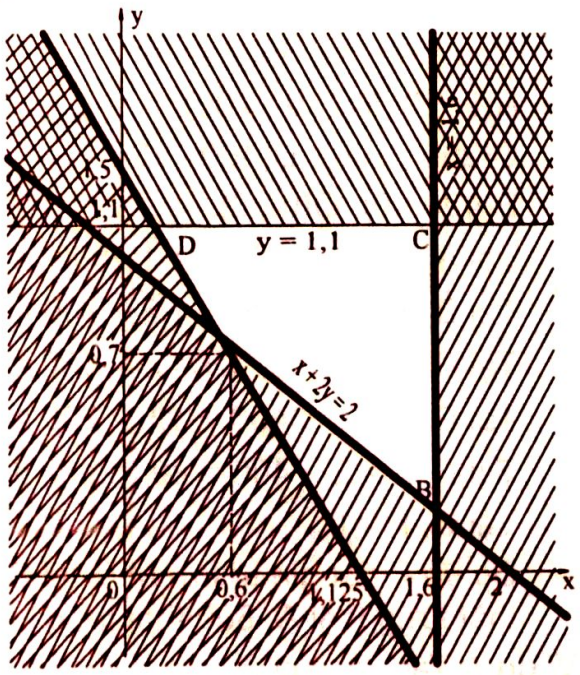
Điều kiện: $0 \geq x \geq 1,6$; $0 \geq y \geq 1,1$

Khi đó, số đơn vị prôtêin có được là 800x + 600y và số đơn vị lipit có được là 200x + 400y. Vì gia đình đó cần ít nhất 900 đơn vị prôtêin và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày nên điều kiện tương ứng là:

$800x + 600y \geq 900$ và $200x + 400y \geq 400$

$\Leftrightarrow 4x + 3y \geq 4,5$ và $x + 2y \geq 2$

Ta có hệ $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \\ 4x + 3y \geq 4,5 \\ x + 2y \geq 2 \end{cases}$



Miền nghiệm của hệ trên là miền tứ giác ABCD (kể cả biên)

Chi phí để mua x (kg) thịt bò và y (kg) thịt lợn là:

T = 45x + 35y (ngàn đồng)

Ta cần tìm (x; y) sao cho T nhỏ nhất.

Ta đã biết T đạt giá trị nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác ABCD.

Tại A(0,6;0,7), ta có T = 45.0,6 + 35.0,7 = 51,5 (nghìn đồng)

Tại B(1,6;0,2), ta có T = 45.1,6 + 35.0,2 = 79 (nghìn đồng)

Tại C(1,6;1,1), ta có T = 45.1,6 + 35.1,1 =110,5 (nghìn đồng)

Tại D(0,3;1,1), ta có T = 45.0,3 + 35.1,1 = 52 (nghìn đồng)

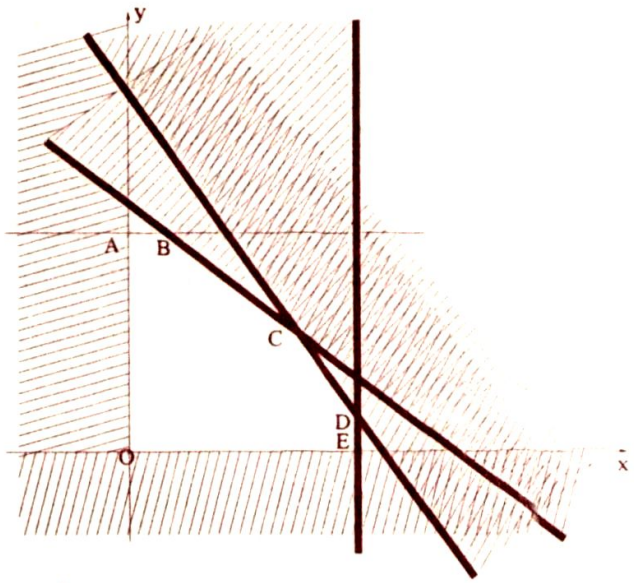
Do đó khi x = 0,6 ; y = 0,7 thì T đạt giá trị nhỏ nhất.

Vậy gia đình đó mua 0,6 kg thịt bò và 0,7 kg thịt lợn thì chi phí ít nhất là 51,5 nghìn đồng.

Ví dụ 6: Một người sản xuất hai loại thắt lưng (nịt) bằng da: A và B. Một thắt lưng loại A đem lại tiền lời 2 nghìn đồng, một thắt lưng loại B lời 1,5 nghìn đồng. Thời gian để hoàn thành một thắt lưng loại A gấp đôi thời gian để hoàn thành một thắt lưng loại B và nếu chỉ sản xuất thắt lưng loại B thì một ngày hoàn thành được 1000 cái. Nguyên liệu da đủ để sản xuất 800 thắt lưng mỗi ngày và trong mỗi ngày chỉ có 400 bút thắt lưng (để gắn vào dây da của thắt lưng) loại A, 700 bút thắt lưng loại B. Tìm số thắt lưng mỗi loại phải sản xuất trong một ngày để đạt mức lời cao nhất.

Giải

Gọi x là số thắt lưng loại A, y là số thắt lưng loại B sản xuất mỗi ngày, $x, y \in \mathbf{N}$.



Tiền lời mỗi ngày là:

$F = 2x + 1,5y$ (ngàn đồng)

Ta có hệ: $\begin{cases} 0 \le x \le 400 \\ 0 \le y \le 700 \\ x + y \le 800 \\ 2x + y \le 10000 \end{cases}$

Các đỉnh của đa giác là:

A(0 ; 7), B(100 ; 700),

C(200 ; 600); D(400 ; 200),

E(400 ; 0), O(0 ; 0).

Tại A, $F = 1,5 \times 700 = 10,500$ (nghìn đồng)

Tại B, $F = 2 \times 100 + 1,5 \times 700 = 125$ (nghìn đồng)

Tại C, $F = 2 \times 200 + 1,5 \times 600 = 130$ (nghìn đồng)

Tại D, $F = 2 \times 400 + 1,5 \times 200 = 110$ (nghìn đồng)

Tại E, $F = 2 \times 400 = 80$ (nghìn đồng)

Tại O, $F = 0$

Do đó F đạt giá trị lớn nhất tại C(200; 600). Vậy người đó phải sản xuất 200 thắt lưng loại A, 600 thắt lưng loại B.

Ví dụ 7: Tác động phối hợp của vitamin A, B đối với con người mỗi ngày:

(i) Một người có thể tiếp nhận không quá 600 đơn vị A và không quá 500 đơn vị B.

(ii) Một người cần 400 đến 1000 đơn vị A và B.

(iii) Số đơn vị A không ít hơn $\frac{1}{2}$ đơn vị B nhưng không nhiều hơn 3 lần đơn vị B.

Nếu phải trả 9 đồng cho đơn vị A và 7,5 đồng cho đơn vị B thì tìm cách sử dụng vitamin tốt nhất và rẻ nhất.

Giải

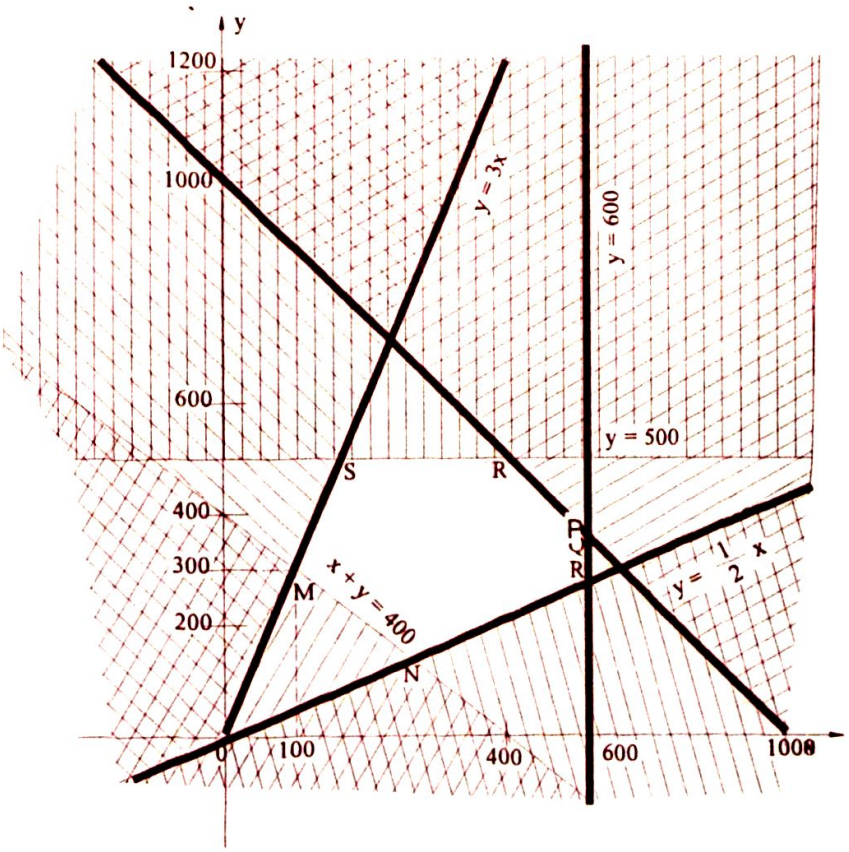
Gọi x, y là số đơn vị vitamin A, B mà một người tiếp nhận mỗi ngày. Ta có

hệ điều kiện: $\begin{cases} 0 \le x \le 600 \\ 0 \le y \le 500 \\ 400 \le x + y \le 1000 \\ \frac{1}{2}x \le y \le 3x \end{cases}$

Miền nghiệm là miền lục giác MNPQRS (kể cả biên)

Số tiền trả mỗi ngày: T = 9x + 7,5y (đồng)

So sánh giá trị T tại 6 đỉnh M, N, P, Q, R, S thì số tiền T đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm M(100; 300) nên phương án tốt nhất là dùng 100 đơn vị vitamin A và 300 đơn vị vitamin B mỗi ngày. Chi phí mỗi ngày là 3150 đồng.



C. BÀI LUYỆN TẬP

1. Tìm miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn:

a) $x - y - 3 > 0$ b) $2x - y + 6 \le 0$

c) $x + y < 0$ d) $x - 3y \ge 0$

HD: vẽ đường thẳng rồi chọn miền nghiệm, chú ý dấu bằng

2. Tìm miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn:

a) $y > x - 3$ b) $2x + 1 \le 0$

c) $x + 3 + 2(2y + 5) < 2(1 - x)$ d) $4(x - 1) + 5(y - 3) > 2x - 9$

3. Tìm miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn:

a) $\begin{cases} x - y > 0 \\ x - 3y < -3 \\ x + y > 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 1 \le x \le 5 \\ 2x - 1 \le y \le 2x + 1 \end{cases}$

HD: vẽ đường thẳng rồi chọn miền nghiệm của từng bất phương trình, giao các miền nghiệm. Chú ý dấu bằng

4. Tìm miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn:

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} - 1 \ge 0 \\ 2(x-1) + \dfrac{3y}{2} \le 4 \\ x \ge 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + y \ge 9 \\ x \ge y - 3 \\ 2y \ge 8 - x \\ y \le 6 \end{cases}$

5. Tìm miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn:

a) $\begin{cases} x + 5y - 10 \ge 0 \\ 2x - 3y \le 4 \\ x \ge 0 \\ y - 2 \le 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 4y \ge 8 \\ x \le 2y - 3 \\ 2x + 2y \ge 1 \\ x - 1 \ge 0 \end{cases}$

HD: vẽ đường thẳng rồi chọn miền nghiệm của từng bất phương trình, giao các miền nghiệm. Chú ý dấu bằng

6. Tìm miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn:

a) $(2x - y + 4)(x + y + 3) > 0$ b) $x^2 - (y-2)^2 \le 0$

HD: xét dấu các thừa số

7. Gọi (S) là tập hợp các điểm trong mặt phẳng toạ độ Oxy có toạ độ thoả mãn hệ: $\begin{cases} -1 \le x \le 2 \\ 3 \le y \le 5 \end{cases}$

a) Xác định miền (S) và toạ độ các đỉnh.

b) Tìm các điểm của (S) làm cho biểu thức $f(x;y) = 3x + 4y - 3$ đạt giá trị lớn nhất.

HD: biểu thức đạt cực trị tại các đỉnh

8. Gọi (S) là tập hợp các điểm trong mặt phẳng toạ độ Oxy có toạ độ thoả mãn hệ: $\begin{cases} 0 \le y \le 3 \\ x - 2 \le y \le 2x + 3 \end{cases}$

a) Xác định miền đa giác (S). Tìm toạ độ các đỉnh.

b) Tìm các điểm của (S) làm cho biểu thức $T = 2x - y$ đạt giá trị nhỏ nhất.

9. Một gia đình định trồng rau và hoa trên diện tích 8a. Nếu trồng rau thì cần 20 công và thu lợi 3 triệu đồng trên mỗi a, còn trồng hoa thì cần 30 công và thu lợi 4 triệu đồng trên mỗi a. Biết số công không được quá 180, tìm phương án tối ưu.

ĐS: trồng 6a rau và 2a hoa, thu lợi 26 triệu đồng.

§4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH – TAM THỨC BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

– Tam thức bậc hai là biểu thức có dạng: $f(x) = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$

– Dấu tam thức bậc hai:

$\Delta < 0$	$af(x) > 0,\ \forall x \in \mathbf{R}$
$\Delta = 0$	$af(x) > 0,\ \forall x \neq -\dfrac{b}{2a}$
$\Delta > 0$ Phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm $x_1 < x_2$	$af(x) < 0,\ \forall x \in (x_1, x_2)$ $af(x) > 0,\ \forall x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$

– Bất phương trình bậc hai:

Dạng $f(x) > 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \leq 0$

Dựa vào Δ và hệ số a để chọn miền nghiệm.

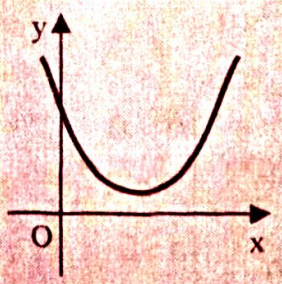
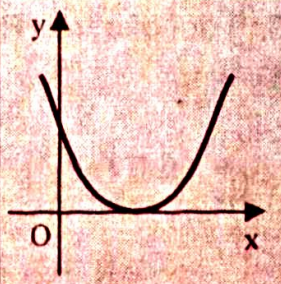
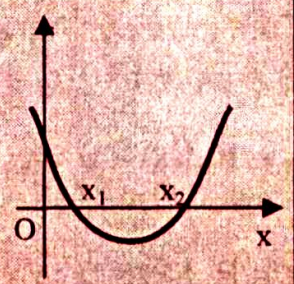
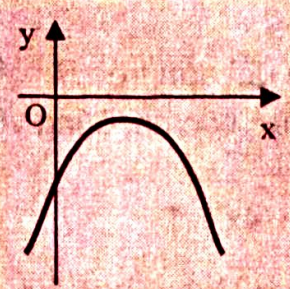
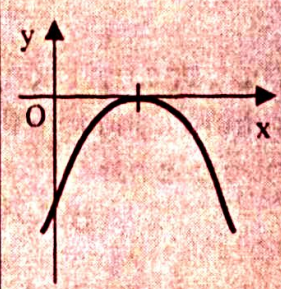
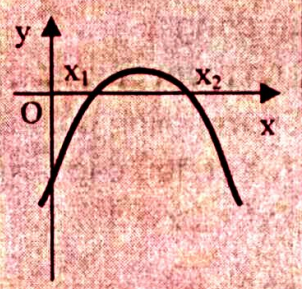
– Bất phương trình và bất phương trình chứa ẩn ở mẫu:

Đặt điều kiện nếu có. Lập bảng xét dấu các nhị thức bậc nhất và tam thức bậc hai, chọn miền nghiệm thích hợp với đề bài và điều kiện.

– Hệ bất phương trình bậc hai:

Giải riêng các bất phương trình của hệ rồi tìm giao các tập nghiệm.

Chú ý: Đồ thị parabol (P): $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ có đỉnh $I\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

B. PHÂN DẠNG TOÁN

DẠNG 1: DẤU TAM THỨC BẬC HAI

• Dấu tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với a, với mọi $x \in \mathbf{R}$

Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với a, với mọi $x \neq -\dfrac{b}{2a}$

Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có nghiệm x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$

$f(x)$ trái dấu a với mọi $x \in (x_1, x_2)$

$f(x)$ cùng dấu a, với mọi $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$

Chú ý:

– Khi $\Delta > 0$ thì dấu $f(x)$ là "trong trái – ngoài cùng"

– Ta có thể dùng Δ' thay cho Δ.

– Dấu của tam thức bậc hai: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Ta có:

$$f(x) = a\left[(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a}\right] \Rightarrow af(x) = a^2\left[(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Nếu $\Delta < 0$ thì $af(x) > 0$ với mọi x, tức là $f(x)$ cùng dấu với a với mọi x.

Nếu $\Delta = 0$ thì $af(x) = a^2(x + \dfrac{b}{2a})^2$ nên $f(x)$ cùng dấu a, mọi $x \neq -\dfrac{b}{2a}$.

Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$;
$af(x) = a^2(x - x_1)(x - x_2)$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		–	0	+		+	
$x - x_2$		–		–	0	+	
$(x - x_1)(x - x_2)$		+	0	–	0	+	

Do đó, $af(x) < 0$ với mọi $x \in (x_1, x_2)$ và $af(x) > 0$ với mọi $x < x_1$ hoặc $x > x_2$

• Tam thức bậc hai không đổi dấu trên **R**:

$f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

$$\forall x \in \mathbf{R}, f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}, \forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbf{R}, f(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}, \forall x \in \mathbf{R}, f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

Ứng dụng:

– Tìm tham số để tam thức bậc hai không đổi dấu trên **R**.

– Chứng minh bất đẳng thức dạng tam thức bậc hai đúng với mọi biến.

Ví dụ 1: Xét dấu các tam thức bậc hai

a) $3x^2 - 2x + 1$

b) $-x^2 + 4x - 1$

c) $x^2 - \sqrt{3}x + \dfrac{3}{4}$

d) $(1 - \sqrt{2})x^2 - 2x + 1 + \sqrt{2}$

Giải

a) TTB2: $3x^2 - 2x + 1$ có $\Delta' = 1 - 3 < 0$ và $a = 3 > 0$ nên tam thức bậc hai dương với mọi $x \in \mathbf{R}$.

b) TTB2: $-x^2 + 4x - 1$ có $\Delta' = 4 - 1 = 3 > 0$ và $a = -1 < 0$ nên tam thức bậc hai âm với mọi $x \in (-\infty; 2 - \sqrt{3}) \cup (2 + \sqrt{3}; +\infty)$ và dương với mọi $x \in (2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3})$.

c) TTB2: $x^2 - \sqrt{3}x + \frac{3}{4}$ có $\Delta = 3 - 3 = 0$ và $a = 1 > 0$ nên tam thức bậc hai dương với mọi $x \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

d) TTB2: $(1 - \sqrt{2})x^2 - 2x + 1 + \sqrt{2}$ có $a + b + c = 0$ nên có 2 nghiệm $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = -(1 + \sqrt{2})^2 = -3 - 2\sqrt{2}$, vì $a = 1 - \sqrt{2} < 0$ nên tam thức bậc hai âm với mọi $x \in (-\infty; -3 - 2\sqrt{2}) \cup (1; +\infty)$ và dương với mọi $x \in (-3 - 2\sqrt{2}; 1)$.

Ví dụ 2: Xét dấu các biểu thức:

a) $P(x) = \frac{2x^2 - 3x - 5}{4 - x^2}$ b) $Q(x) = \frac{1}{x^2 - 7x + 12} - \frac{1}{x^2 - 5x + 4}$

Giải

a) ĐK: $x \neq \pm 2$. Cho $2x^2 - 3x - 5 = 0 \Rightarrow x = -1$ hoặc $x = \frac{5}{2}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		-1		2		$5/2$		$+\infty$
$2x^2 - 3x + 5$		+		+	0	−		−	0	+	
$4 - x^2$		−	0	+		+	0	−		−	
P(x)		−	‖	+	0	−	‖	+	0	−	

b) ĐK: $\begin{cases} x^2 - 7x + 12 \neq 0 \\ x^2 - 5x + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3, x \neq 4 \\ x \neq 1, x \neq 4 \end{cases}$

$$Q(x) = \frac{1}{x^2 - 7x + 12} - \frac{1}{x^2 - 5x - 4} = \frac{2x - 8}{(x^2 - 7x + 12)(x^2 - 5x + 4)}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		1		3		4		$+\infty$
$2x - 8$		−		−		−	0	+	
$x^2 - 7x + 12$		+		+	0	−	0	+	
$x^2 - 5x + 4$		+	0	−		−	0	+	
Q(x)		−	‖	+	‖	−	‖	+	

Ví dụ 3: Tìm m để mỗi biểu thức sau luôn luôn dương:

a) $(m^2 + 2)x^2 - 2(m + 1)x + 1$ b) $(m + 2)x^2 + 2(m + 2)x + m + 3$.

Giải

a) Vì $a = m^2 + 2 > 0$ nên $(m^2 + 2)x^2 - 2(m + 1) + 1 > 0, \forall x$

$\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow (m + 1)^2 - (m^2 + 2) < 0 \Leftrightarrow 2m < 1 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$.

b) Đặt $f(x) = (m + 2)x^2 + 2(m + 2)x + m + 3$

Xét $m = -2$, ta có $f(x) = 1 > 0$ với mọi x : chọn.

Xét $m \neq -2$, f(x) là một tam thức bậc hai nên

$$f(x) > 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 > 0 \\ (m+2)^2 - (m+2)(m+3) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 > 0 \\ -m - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2.$$ Vậy: $m \geq -2$.

Ví dụ 4: Tìm m để mỗi biểu thức sau luôn luôn âm:

a) $-x^2 + 2m\sqrt{2}x - 2m^2 - 1$ b) $(m - 2)x^2 - 2(m - 3)x + m - 1$

Giải

a) Vì $a = -1 < 0$ nên $-x^2 + 2m\sqrt{2}x - 2m^2 - 1 < 0, \forall x$

$\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow 2m^2 - (2m^2 + 1) < 0 \Leftrightarrow 0.m < 1$: đúng, với mọi m.

Vậy với mọi m thì TTB2 luôn luôn âm.

b) Xét $m = 2$ thì $f(x) = 2x + 1$ không luôn luôn âm: loại.

Xét $m \neq 2$ thì f(x) là TTB2 nên:

$$f(x) < 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 > 0 \\ (m-3)^2 - (m-2)(m-1) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 < 0 \\ 7 - 3m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m > \frac{7}{2} \end{cases}$$: vô nghiệm

Vậy không tồn tại m để TTB2 luôn luôn âm.

Ví dụ 5: Tìm các giá trị của m để bất phương trình sau được nghiệm đúng với mọi x:

a) $(2m^2 - 3m - 2)x^2 + 2(m - 2)x - 1 \leq 0$ b) $(m + 4)x^2 < 2(mx - m + 3)$

Giải

a) Xét $2m^2 - 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$ hoặc $m = 2$

Khi $m = -\frac{1}{2}$ thì bất phương trình $-5x - 1 \leq 0$ không nghiệm đúng với mọi x (loại).

Khi $m = 2$ thì bất phương trình $0x \leq 1$ nghiệm đúng với mọi x.

Xét $2m^2 - 3m - 2 \neq 0$ thì vế trái là TTB2 nên $f(x) \leq 0, \forall x$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 - 3m - 2 \leq 0 \\ 3m^2 - 7m + 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} < m < 2 \\ -\frac{1}{3} \leq m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq m < 2$$

Vậy giá trị m cần tìm: $-\frac{1}{3} \leq m \leq 2$.

b) $(m+4)x^2 < 2(mx - m + 3) \Leftrightarrow (m+4)x^2 - 2mx - 6 < 0$

Xét $m = -4$ thì BPT: $8x - 14 < 0, \forall x$ (loại)

Xét $m \neq -4$ thì vế trái là TTB2 nên $f(x) < 0, \forall x$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ m^2 - (m+4)(2m-6) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ -m^2 - 2m + 24 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ m < -4 \text{ hay } m > 6 \end{cases} \Leftrightarrow m < -4$$

Vậy giá trị m cần tìm: $m < -4$.

Ví dụ 6: Tìm tham số để:

a) $-1 \leq \dfrac{x^2 + 5x + a}{2x^2 - 3x + 2} < 7, \forall x$ (1) b) $\left|\dfrac{x^2 + x + 4}{x^2 - mx + 4}\right| \leq 2 \ \forall x$ (2)

Giải

a) Ta có: $2x^2 - 3x + 2 > 0, \forall x$ (vì $\Delta = 9 - 16 < 0, a = 2 > 0$) nên:

(1) $\Leftrightarrow -2x^2 + 3x - 2 \leq x^2 + 5x + a < 7(2x^2 - 3x + 2), \forall x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2x + a + 2 \geq 0, \forall x \\ 13x^2 - 26x - a + 14 > 0, \forall x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 > 0, \Delta'_1 \leq 0 \\ a_2 > 0, \Delta'_2 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 3(a+2) \leq 0 \\ 169 - 13(-a + 14) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a \geq -5 \\ 13a < 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -\dfrac{5}{3} \\ a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{3} \leq a < 1$$

b) Để thoả được bài toán, trước hết ta phải có: $x^2 - mx + 4 \neq 0, \forall x$.

$\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 4$.

Lúc đó: (2) $\Leftrightarrow x^2 + x + 4 \leq 2(x^2 - mx + 4), \forall x$

$\Leftrightarrow x^2 - (2m + 1)x + 4 \geq 0, \forall x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (2m + 1)^2 - 16 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}$$

Vậy giá trị m cần tìm: $-\dfrac{5}{2} \leq m \leq \dfrac{3}{2}$.

Ví dụ 7: Với những giá trị nào của m thì các bất phương trình sau vô nghiệm:

a) $(2m^2 + m - 6)x^2 + (2m - 3)x - 1 > 0$ b) $(m + 2)x^2 - 2(m - 1)x + 4 \leq 0$

Giải

a) Điều kiện tương đương: $(2m^2 + m - 6)x^2 + (2m - 3)x - 1 \leq 0, \forall x$.

Xét $2m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = -2$ hoặc $m = \dfrac{3}{2}$

Khi $m = -2$ thì bất phương trình: $-7x - 1 > 0, \forall x$: loại

Khi $m = \dfrac{3}{2}$ thì bất phương trình: $0x \leq 1, \forall x$: đúng

Xét $2m^2 + m - 6 \neq 0$ thì vế trái là TTB2 nên:

$$f(x) \le 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 + m - 6 < 0 \\ 12m^2 - 8m - 15 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{6} \le m \le \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{6} \le m < \frac{3}{2}$$

Vậy giá trị m cần tìm: $-\frac{5}{6} \le m \le \frac{3}{2}$.

b) Điều kiện tương đương: $(m + 2)x^2 - 2(m - 1)x + 4 > 0, \forall x$

Xét $m = -2$ thì bất phương trình $-x + 4 > 0, \forall x$: loại

Xét $m \neq -2$ thì vế trái là TTB2 nên $f(x) > 0, \forall x$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 > 0 \\ m^2 - 6m - 7 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ -1 < m < 7 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 7$$

Ví dụ 8: Định m để các hàm số sau có miền xác định là **R**

a) $y = 1 - \sqrt{m(m+2)x^2 + 2mx + 2}$ b) $y = \dfrac{4 - 3x}{\sqrt{(m+1)x^2 + 2mx + 9m + 5}}$.

Giải

a) Hàm số có miền xác định là **R** khi và chỉ khi

$f(x) = m(m + 2)x^2 + 2mx + 2 \ge 0, \forall x$

Nếu $m = 0$ thì $f(x) = 2 \ge 0, \forall x$: đúng

Nếu $m = -2$ thì $f(x) = -4x + 2, \forall x$: loại

Nếu $m \neq 0$ và $m \neq -2$ thì $f(x) \ge 0, \forall x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m(m+2) > 0 \\ \Delta' = -m^2 - 4m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \le -4 \text{ hoặc } m > 0$$

Vậy: $m \le -4$ hoặc $m \ge 0$

b) Hàm số có miền xác định là **R** khi và chỉ khi

$f(x) = (m + 1)x^2 + 2mx + 9m + 5 \ge 0, \forall x$

Khi $m = -1$ thì $f(x) = -2x - 4, \forall x$: loại

Khi $m \neq -1$ thì $f(x) > 0, \forall x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 > 0 \\ \Delta' = -8m^2 - 14m - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m < -\frac{5}{4} \text{ hay } m > -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 9: Cho $a_1x^2 + 2b_1x + c_1 \ge 0, \forall x$ và $a_2x^2 + 2b_2x + c_2 \ge 0, \forall x$

Chứng minh rằng: $a_1a_2x^2 + 2b_1b_2x + c_1c_2 \ge 0, \forall x$

Giải

Xét $a_1 = 0$ hoặc $a_2 = 0$ thì $b_1 = 0$, $a_1 \ge 0$ hoặc $b_2 = 0$, $c_2 \ge 0 \Rightarrow$ đpcm

Xét $a_1, a_2 \neq 0$ từ giả thiết ta có:

$$\begin{cases} a_1 > 0 \\ a_2 > 0 \\ \Delta'_1 = b_1^2 - a_1c_1 \leq 0 \\ \Delta'_2 = b_2^2 - a_2c_2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1a_2 > 0 \\ b_1^2 \leq a_1c_1 \\ b_2^2 \leq a_2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1a_2 > 0 \\ b_1^2b_2^2 \leq a_1a_2c_1c_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1a_2 > 0 \\ (b_1b_2)^2 - (a_1a_2).(c_1c_2) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Ví dụ 10: Gọi a, b, c là ba cạnh của ΔABC.

Chứng minh bất đẳng thức: $f(x) = x(1 - x)c^2 - xa^2 + (x - 1)b^2 < 0, \forall x$.

Giải

Viết lại $f(x) = -c^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x - b^2 < 0, \forall x$

Ta có: $\Delta = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2$

$= (b^2 + c^2 - a^2 + 2bc)(b^2 + c^2 - a^2 - 2bc)$

$= [(b + c)^2 - a^2]\,[(b - c)^2 - a^2].$

$= (b + c + a)(b + c - a)(b - c + a)(b - c - a)$

Vì a, b, c là 3 cạnh tam giác nên có $\Delta < 0$

và hệ số theo x^2 là $-c^2 < 0 \Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 11: Chứng minh bất đẳng thức:

$F = 19x^2 + 54y^2 + 16z^2 + 36xy - 16xz - 24yz \geq 0$ với mọi x, y, z

Giải

Ta xem F là tam thức bậc 2 theo biến x.

Đặt $f(x) = F = 19x^2 + 4(9y - 4z)x + 54y^2 + 16z^2 - 24yz$

Ta có $\Delta'_x = 4(9y - 4z)^2 - 19(54y^2 + 16z^2 - 24yz) = -702y^2 + 168yz - 240z^2$

Đặt $g(y) = \Delta'_x = -702y^2 + 168zy - 240z^2$

Ta có: $\Delta'_y = (84^2 - 702.240)z^2 \leq 0, \forall z$

Suy ra $g(y) \leq 0, \forall y, \forall z$ nên $f(x) \geq 0, \forall x, \forall y, \forall z$: đpcm.

Ví dụ 12: Chứng minh bất đẳng thức Bunhiacốpxki với 2n số $a_1, a_2,...,a_n$ và $b_1, b_2,...,b_n$ tuỳ ý:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$$

Giải

Nếu $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$ thì BĐT đúng.

Nếu $a_1, a_2,..., a_n$ không đồng thời bằng $0 \Rightarrow a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 > 0$

Ta có $(a_ix - b_i)^2 \geq 0, \forall x \Rightarrow a_i^2.x^2 - 2a_ib_ix + b_i^2 \geq 0, \forall x$

Cho i = 1, 2,...,n và cộng lại thì được:

$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2) - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \geq 0, \forall x$$

Vì vế trái là TTB2: $f(x) \geq 0, \forall x$ nên $\Delta' \leq 0$

$$\Rightarrow (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \leq 0$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 13: Chứng minh phương trình sau luôn luôn vô nghiệm:

$$x^2 - 2(m + 1)x + 2m^2 + m + 3 = 0$$

Giải

Vì phương trình là phương trình bậc hai nên ta chứng minh $\Delta' < 0, \forall m$. Thật vậy:

$\Delta' = (m + 1)^2 - (2m^2 + m + 3) = -m^2 + m - 2$.

Δ' là tam thức bậc hai biến m, có biệt số $\Delta_m = -7 < 0$ với mọi m. Do đó $\Delta' < 0$ với mọi m. Vậy suy ra phương trình luôn vô nghiệm.

DẠNG 2: BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

• Bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c > 0$ $(a \neq 0)$ được giải như sau: Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Xét $\Delta < 0$: f(x) luôn cùng dấu với a, $\forall x$

Do đó: Nếu $a < 0$ thì bất phương trình vô nghiệm

Nếu $a > 0$ thì bất phương trình nghiệm đúng $\forall x$

Xét $\Delta = 0$: f(x) luôn cùng dấu với a, $\forall x \neq -\frac{b}{2a}$

Do đó: Nếu $a < 0$ thì bất phương trình vô nghiệm

Nếu $a > 0$ thì bất phương trình có nghiệm $\forall x \neq -\frac{b}{2a}$

Xét $\Delta > 0$: f(x) có 2 nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$

Do đó: Nếu $a < 0$ thì bất phương trình có nghiệm $x_1 < x < x_2$

Nếu $a > 0$ thì bất phương trình có nghiệm $x < x_1$ hoặc $x > x_2$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f(x)	cùng dấu a	0	trái dấu a	0	cùng dấu a		

• Bất phương trình tích:

– Đưa bất phương trình đã cho về dạng $P(x) < 0$, $P(x) \leq 0$, $P(x) > 0$, $P(x) \geq 0$, trong đó P(x) là tích một số nhị thức bậc nhất và tam thức bậc hai.

– Lập bảng xét dấu vế trái rồi chọn miền nghiệm.

• Bất phương trình chứa ẩn ở mẫu thức:

– Đặt điều kiện xác định.

– Đưa bất phương trình đã cho về dạng $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$, trong đó tử thức, mẫu thức là tích một số nhị thức bậc nhất và tam thức bậc hai.

– Lập bảng xét dấu vế trái rồi chọn miền nghiệm thích hợp với điều kiện.

Chú ý:

– Đặc biệt $\frac{ax+b}{cx+d} > 0 \Leftrightarrow (ax + b)(cx + d) > 0$;

$\frac{ax+b}{cx+d} \geq 0 \Leftrightarrow (ax + b)(cx + d) \geq 0, cx + d \neq 0$.

– Các đại lượng không đổi dấu, dấu = dấu của bất phương trình.

– Ngoài cách lập bảng xét dấu của TTB2 khi $\Delta > 0$, ta có thể dựa vào dấu của a để nhẩm chọn miền nghiệm trong hoặc ngoài.

Ví dụ 1: Giải các bất phương trình:

a) $-5x^2 + 4x + 12 < 0$ b) $16x^2 + 40x + 25 < 0$

c) $3x^2 - 4x + 4 \geq 0$ d) $x^2 - x - 6 \leq 0$

Giải

a) TTB2: $-5x^2 + 4x + 12$ có nghiệm $x = -\frac{6}{5}$ và $x = 2$. BXD:

x	$-\infty$		$-6/5$		2		$+\infty$
f(x)		–	0	+	0	–	

Vậy tập nghiệm $S = (-\infty; -\frac{6}{5}) \cup (2; +\infty)$.

b) TTB2: $16x^2 + 40x + 25$ có $\Delta' = 400 - 16.25 = 0$, $a = 16 > 0$

$\Rightarrow f(x) \geq 0, \forall x$ nên BPT vô nghiệm: $S = \varnothing$

c) TTB2: $3x^2 - 4x + 4$ có $\Delta' = 4 - 12 < 0$, $a = 3 > 0$

$\Rightarrow f(x) > 0, \forall x$ nên BPT có nghiệm là mọi x: $S = \mathbf{R}$.

d) TTB2: $x^2 - x - 6$ có 2 nghiệm $x = -2$ và $x = 3$, $a = 1 > 0$

nên $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 3$. Vậy $S = [-2; 3]$.

Ví dụ 2: Giải các bất phương trình:

a) $(2x + 1)(x^2 + x - 30) \geq 0$ b) $x^4 - 3x^2 \leq 0$

c) $(x - 3)(x^2 + x - 6) > (x - 2)(x^2 + 5x + 4)$ d) $x^3 + 2x^2 - x - 2 > 0$.

Giải

a) Cho $2x+1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$, $x^2 + x - 30 \Rightarrow x = -6$ hoặc $x = 5$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-6		$-1/2$		5		$+\infty$
$2x + 1$		–	|	–	0	+	|	+	
$x^2 + x - 30$		+	0	–	|	–	0	+	
VT		–	0	+	0	–	0	+	

Vậy tập nghiệm $S = [-6; -\frac{1}{2}] \cup [5; +\infty]$

b) $x^4 - 3x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 3) \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x^2 - 3 \leq 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x^2 \leq 3 \Leftrightarrow x^2 \leq 3 \Leftrightarrow |x| \leq 3$

Vậy tập nghiệm $S = [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$.

c) BPT $\Leftrightarrow (x - 3)(x - 2)(x + 3) > (x - 2)(x + 1)(x + 4)$

$\Leftrightarrow (x - 2)[(x - 3)(x + 3) - (x + 2)(x + 4)] > 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(5x + 13) < 0 \Leftrightarrow -\frac{13}{5} < x < 2$

d) $x^3 + 2x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow x^2(x + 2) - (x + 2) > 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - 1) > 0$.

Lập bảng xét dấu vế trái, ta có tập nghiệm $S = (-2; -1) \cup (1; +\infty)$.

Ví dụ 3: Giải các bất phương trình:

a) $\frac{x^2-9x+14}{x^2-5x+4}>0$ b) $\frac{-2x^2+7x+7}{x^2-3x-10}\le -1$

c) $\frac{1}{x^2-5x+4}<\frac{1}{x^2-7x+10}$ d) $\frac{(x-1)(x^3-1)}{x^2+(1+2\sqrt{2})x+2+\sqrt{2}}\le 0$

Giải

a) ĐK: $x^2-5x+4\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$ và $x\neq 4$.

Cho $x^2-9x+14=0\Rightarrow x=2$ hoặc $x=7$. BXD:

x	$-\infty$		1		2		4		7		$+\infty$
$x^2-9x+14$		+		+	0	−		−	0	+	
x^2-5x+4		+	0	−		−	0	+		+	
VT		+	‖	−	0	+	‖	−	0	+	

Vậy tập nghiệm $S=(-\infty;1)\cup(2;4)\cup(7;+\infty)$.

b) ĐK: $x^2-3x-10\neq 0\Leftrightarrow x\neq 2$ và $x\neq -5$

BPT: $\frac{-2x^2+7x+7}{x^2-3x-10}+1\le 0\Leftrightarrow\frac{-x^2+4x-3}{x^2-3x-10}\le 0$

Cho $-x^2+4x-3=0\Rightarrow x=1$ hoặc $x=3$.

Lập bảng xét dấu vế trái thì được tập nghiệm:

$S=(-\infty,-2)\cup[1;3]\cup(5;+\infty)$

c) ĐK: $x^2-5x+4\neq 0, x^2-7x+10\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1, x\neq 4, x\neq 2, x\neq 5$.

BPT $\Leftrightarrow\frac{1}{x^2-5x+4}-\frac{1}{x^2-7x+10}<0\Leftrightarrow\frac{-2x+6}{(x^2-5x+4)(x^2-7x+10)}<0$

Lập bảng xét dấu vế trái thì được tập nghiệm $S=(1;2)\cup(3;4)\cup(5;+\infty)$

d) ĐK: $x^2+(1+2\sqrt{2})x+2+\sqrt{2}\neq 0\Leftrightarrow x\neq -1-\sqrt{2}, x\neq -\sqrt{2}$.

BPT: $\frac{(x-1)^2(x^2+x+1)}{x^2+(1+2\sqrt{2})x+2+\sqrt{2}}\le 0\Leftrightarrow\frac{x^2+x+1}{x^2+(1+2\sqrt{2})+2+\sqrt{2}}\le 0$ hoặc $x=1$

$\Leftrightarrow x^2+(1+2\sqrt{2})x+2+\sqrt{2}<0$ hoặc $x=1$ (vì $x^2+x+1>0,\forall x$)

$\Leftrightarrow -1-\sqrt{2}<x<-\sqrt{2}$ hoặc $x=1$.

Vậy tập nghiệm $S=(-1-\sqrt{2};-\sqrt{2})\cup\{1\}$.

Ví dụ 4: Tìm tập xác định của hàm số:

a) $y=\sqrt{(2x+5)(1-2x)}$ b) $y=\sqrt{\frac{x^2+5x+4}{2x^2+3x+1}}$

Giải

a) ĐK: $(2x+5)(1-2x)\ge 0\Leftrightarrow -\frac{5}{2}\le x\le\frac{1}{2}$. Vậy $D=[\frac{5}{2};\frac{1}{2}]$.

b) ĐK: $\frac{x^2+5x+4}{2x^2+3x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x+4)}{2(x+1)(x+\frac{1}{2})} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1, x \neq -\frac{1}{2} \\ \frac{x+4}{x+\frac{1}{2}} \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \leq -4 \text{ hay } x > -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -4 \text{ hay } x > -\frac{1}{2}$

Vậy tập xác định của hàm số D = $(-\infty; -4) \cup (-\frac{1}{2}; +\infty)$.

Ví dụ 5: Tìm m để mỗi phương trình sau có nghiệm:

a) $(m-5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$

b) $(m+1)x^2 + 2(m-1)x + 2m - 3 = 0$

Giải

a) Xét m = 5 thì PT: $-20x + 3 = 0$: có nghiệm.

Xét $m \neq 5$, điều kiện PT bậc hai có nghiệm là $\Delta' \geq 0$

$\Leftrightarrow 4m^2 - (m-5)(m-2) \geq 0 \Leftrightarrow 3m^2 + 7m - 10 \geq 0$

$\Leftrightarrow m \leq -\frac{10}{3}$ hoặc $m \geq 1$ $(m \neq 5)$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m \leq -\frac{10}{3}$ hoặc $m \geq 1$.

b) Xét m = –1 thì PT: $-4x - 5 = 0$: có nghiệm.

Xét $m \neq -1$, điều kiện PT bậc hai có nghiệm là $\Delta' \geq 0$

$\Leftrightarrow (m-1)^2 - (m+1)(2m-3) \geq 0 \Leftrightarrow -m^2 - m + 4 \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \leq m \leq \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

Ví dụ 7: Tìm m để phương trình

a) $(m^2 + 6m - 16)x^2 + (m+1)x - 5 = 0$ có 2 nghiệm trái dấu.

b) $x^2 - (2-m)x + 2 - m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thoả: $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_2}\right)^2 > 7$ (1).

Giải

a) Điều kiện phương trình có 2 nghiệm trái dấu: P < 0

$\Leftrightarrow (m^2 + 6m - 16)(-5) < 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m - 16 > 0$

$\Leftrightarrow m < -8$ hoặc $m > 2$.

b) Điều kiện có nghiệm $\Delta = m^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -2$ hoặc $m \geq 2$ và $x_1x_2 \neq 0$

$\Leftrightarrow P = 2 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$.

Với điều kiện đó, dùng định lí Viet thì:

$(1) \Leftrightarrow (m-2)^2 + \frac{1}{(m-2)^2} > 7 \Leftrightarrow (m-2)^4 - 7(m-2)^2 + 1 > 0$ (2)

Đặt $t = (m-2)^2 > 0$ thì $(2) \Leftrightarrow t^2 - 7t + 1 > 0$

$\Leftrightarrow t < 7 - 3\sqrt{5}$ hoặc $t > 7 + 3\sqrt{5}$.

Do đó: $\begin{bmatrix}(m-2)^2 < 7-3\sqrt{5}\\(m-2)^2 > 7+3\sqrt{5}\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}2-\sqrt{7-3\sqrt{5}} < m < 2+\sqrt{7-3\sqrt{5}}\\m < 2-\sqrt{7+3\sqrt{5}} \text{ hay } m > 2+\sqrt{7+3\sqrt{5}}\end{bmatrix}$

Giao điều kiện suy ra: $\begin{bmatrix}2 < m < 2+\sqrt{7-3\sqrt{5}}\\m \le -2 \text{ hay } m > 2+\sqrt{7+3\sqrt{5}}\end{bmatrix}$

Ví dụ 8: Tìm m để:

a) PT: $x^2 - 6mx + 2 - 2m + 9m^2 = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt.

b) BPT: $5x^2 - x + m \le 0$ có nghiệm.

Giải

a) Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\Delta > 0\\S > 0\\P > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}9m^2 - (2 - 2m + 9m^2) > 0\\6m > 0\\9m^2 - 2m + 2 > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2m - 2 < 0\\m > 0\\9m^2 - 2m + 2 > 0\end{cases}$$

Vì $9m^2 - 2m + 2 > 0, \forall m$ nên $0 < m < 1$.

b) Vì $a = 5 > 0$ nên BPT $f(x) \le 0$ có nghiệm khi $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow 1 - 20m \ge 0 \Leftrightarrow m \le \frac{1}{20}$.

Cách khác: Xét BPT vô nghiệm tức là $f(x) \ge 0, \forall x$ rồi chuyển qua điều kiện có nghiệm.

Ví dụ 9: Giải và biện luận các bất phương trình:

a) $a^2x + 1 > (3a - 2)x + 3$

b) $2x^2 + (m - 9)x + m^2 + 3m + 4 \ge 0$.

Giải

a) BPT $\Leftrightarrow (a^2 - 3a + 2)x > 2$.

Nếu $a^2 - 3a + 2 > 0 \Leftrightarrow a < 1$ hoặc $a > 2$ thì nghiệm của bất phương trình là $x > \frac{2}{a^2 - 3a + 2}$.

Nếu $a^2 - 3a + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < a < 2$ thì nghiệm của bất phương trình là $x < \frac{2}{a^2 - 3a + 2}$.

Nếu $a^2 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = 1$ hoặc $a = 2$ thì bất phương trình trở thành $0x > 2$: vô nghiệm.

b) Ta có: $\Delta = (m - 9)^2 - 8(m^2 + 3m + 4) = -7(m^2 + 6m - 7)$, $a = 2 > 0$.

Nếu $\Delta \le 0 \Leftrightarrow m \le -7$ hoặc $m \ge 1$ thì $f(x) \ge 0, \forall x$ nên BPT có nghiệm là mọi x.

Nếu $\Delta > 0 \Leftrightarrow -7 < m < 1$ thì tam thức có 2 nghiệm :

$$x = \frac{9 - m \pm \sqrt{-7(m^2 + 6m - 7)}}{4}$$

Do đó BPT có nghiệm:

$$x \le \frac{9-m-\sqrt{-7(m^2+6m-7)}}{4} \text{ hoặc } x \ge \frac{9-m+\sqrt{-7(m^2+6m-7)}}{4}.$$

Ví dụ 10: Giải và biện luận bất phương trình:

a) $(m-2)x^2 - 2(m-1)x + m > 0$ b) $mx^2 - (m+1)x + 2 \ge 0$.

Giải

a) Xét m = 2 thì BPT: $-2x + 2 > 0 \Leftrightarrow x < 1$

Xét $m \ne 2$, ta có a + b + c = 0 nên tam thức bậc hai có hai nghiệm $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{m}{m-2} = 1 + \frac{2}{m-2}$, do đó:

Khi m > 2: Nghiệm của bất phương trình là $x < 1$ hoặc $x > \frac{m}{m-2}$

Khi m < 2: Nghiệm của bất phương trình là $\frac{m}{m-2} < x < 1$.

b) – Xét m = 0: bất phương trình: $-x + 2 \ge 0 \Leftrightarrow x \le 2$.

– Xét $m \ne 0$: Ta có $\Delta = (m+1)^2 - 8m = m^2 - 6m + 1$

Tam thức $m^2 - 6m + 1$ có hai nghiệm: $m_1 = 3 - 2\sqrt{2}$, $m_2 = 3 + 2\sqrt{2}$.

Nếu m < 0 thì $\Delta > 0 \Rightarrow$ tam thức có hai nghiệm:

$$x_1 = \frac{m+1-\sqrt{m^2-6m+1}}{2m},\ x_2 = \frac{m+1+\sqrt{m^2-6m+1}}{2m} \text{ và } x_2 < x_1$$

Do đó nghiệm của bất phương trình là $x_2 \le x \le x_1$.

Nếu $0 < m < 3 - 2\sqrt{2}$ hoặc $m > 3 + 2\sqrt{2}$ thì $\Delta > 0$ và có $x_1 < x_2$ nên nghiệm của bất phương trình là $x \le x_1$ hoặc $x \ge x_2$.

Nếu $3 - 2\sqrt{2} \le m \le 3 + 2\sqrt{2}$ thì a > 0, $\Delta \le 0$ nên bất phương trình có nghiệm với mọi x.

Ví dụ 11: Tìm a, b để hai bất phương trình tương đương:

(1): $x^2 - 2x \le 0$ (2): $(x - 2a + b - 1)(x + a - 2b + 1) \le 0$.

Giải

Ta có $(1) \Leftrightarrow 0 \le x \le 2$.

TTB2 (2) có 2 nghiệm $x = 2a - b + 1$, $x_2 = -a + 2b - 1$

Nếu $2a - b + 1 \le -a + 2b - 1$ thì $(2) \Leftrightarrow 2a - b + 1 \le x \le -a + 2b - 1$

Điều kiện tương đương: $\begin{cases} 2a-b+1=0 \\ -a+2b-1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$ (chọn)

Nếu $2a - b + 1 > -a + 2b - 1$ thì $(2) \Leftrightarrow -a + 2b - 1 \le x \le 2a - b + 1$.

Điều kiện tương đương: $\begin{cases} -a+2b-1=0 \\ 2a-b+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=\frac{5}{3} \end{cases}$ (chọn)

Vậy: $a = b = 1$ hoặc $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{5}{3}$.

Ví dụ 12: Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số:

a) $y = \frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 + 1}$ b) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Giải

a) TXĐ: D = **R**. Ta chuyển hàm số về phương trình:

$y = \frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 + 1} \Leftrightarrow (y - 1)x^2 + 8x + y - 7 = 0$

Xét $y = 1$ thì PT: $8x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$.

Xét $y \neq 1$, vì PT bậc hai có nghiệm nên $\Delta' \geq 0$

$\Leftrightarrow 16 - (y - 1)(y - 7) \geq 0 \Leftrightarrow -y^2 + 8y + 9 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 9$.

Vậy maxy = 9, miny = –1.

b) TXĐ: D = **R**, ta có: $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \Leftrightarrow (y - 1)x^2 + y + 1 = 0$

Xét $y = 1$ thì PT: $0x + 2 = 0$: vô nghiệm

Xét $y \neq 1$ thì PT có nghiệm nên $\Delta \geq 0 \Rightarrow -(y - 1)(y + 1) \geq 0$.

$(y + 1)(y - 1) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 1$. Do đó $-1 \leq y < 1$, $\forall x$.

Vậy không tồn tại giá trị lớn nhất và miny = –1 tại x = 0.

Ví dụ 13: Tìm a và b sao cho hàm số $y = \frac{ax + b}{x^2 + 1}$ có giá trị bé nhất là –1 và có giá trị lớn nhất là 4.

Giải

Ta có: $y \leq 4, \forall x \Leftrightarrow \frac{ax + b}{x^2 + 1} \leq 4, \forall x \Leftrightarrow 4x^2 - ax + 4 - b \geq 0, \forall x$.

$\Leftrightarrow \Delta_1 \leq 0 \Leftrightarrow a^2 - 16(4 - b) \leq 0 \Leftrightarrow a^2 + 16b - 64 \leq 0$.

Vì maxy = 4 nên phương trình sau có nghiệm x

$y = 4 \Leftrightarrow 4x^2 - ax + 4 - b = 0$

Ta có: $\Delta_1 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + 16b - 64 \geq 0$. Do đó: $a^2 + 16b - 64 = 0$

Ta có: $y \geq -1, \forall x \Leftrightarrow \frac{ax + b}{x^2 + 1}, \forall x \Leftrightarrow x^2 + ax + 1 + b \geq 0, \forall x$

$\Leftrightarrow \Delta_2 \leq 0 \Leftrightarrow a^2 - 4(1 + b) \leq 0 \Leftrightarrow a^2 - 4b - 4 \leq 0$.

Vì miny = –1 nên phương trình sau có nghiệm x:

$y = -1 \Leftrightarrow x^2 + ax + 1 + b = 0$

Ta có $\Delta_2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 4b - 4 \geq 0$. Do đó $a^2 - 4b - 4 = 0$.

Vậy ta có hệ $\begin{cases} a^2 + 16b = 64 \\ a^2 - 4b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 4 \\ b = 3 \end{cases}$

Ví dụ 14: Giải các bất phương trình sau:

a) $(x-1)(x-3) \le \dfrac{18}{x^2-4x-4}$ b) $\dfrac{6x}{2x^2-5x+3} - \dfrac{x}{2x^2+5x+3} \ge 0$

Giải

a) Điều kiện: $x^2-4x-4 \ne 0 \Leftrightarrow x \ne 2 \pm 2\sqrt{2}$.

BPT $\Leftrightarrow x^2-4x+3 \le \dfrac{18}{x^2-4x-4}$

Đặt $x^2-4x-4 = t\ (t \ne 0) \Rightarrow x^2-4x+3 = t+7$

BPT $\Leftrightarrow t+7 \ge \dfrac{18}{t} \Leftrightarrow \dfrac{t^2+7t-18}{t} \le 0$

Lập bảng xét dấu thì được nghiệm: $t \le -9$ hoặc $0 < t \le 2$.

$\Leftrightarrow x^2-4x-4 \le 9$ hoặc $0 < x^2-4x-4 \le 2$.

$\Leftrightarrow x^2-4x+5 \le 0$ hoặc $\begin{cases} x^2-4x-4 \ge 0 \\ x^2-4x-6 \le 0 \end{cases}$

Từ đó giải ra được tập nghiệm:

$$S = [2-\sqrt{10}\,;\, 2-2\sqrt{2}\,] \cup (2+2\sqrt{2}\,;\, 2+\sqrt{10}\,].$$

b) Nếu $x = 0$ thì BPT được thoả.

Nếu $x \ne 0$ chia tử và mẫu cho x.

Đặt $t = 2x + \dfrac{3}{x}$ thì BPT: $\dfrac{6}{t-5} - \dfrac{1}{t+5} \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{5t+35}{t^2-25} \ge 0$

Lập bảng xét dấu thì được nghiệm: $-7 < t < -5$ hoặc $t > 5$.

$\Leftrightarrow -7 \le \dfrac{2x^2+3}{x} < -5$ hoặc $\dfrac{2x^2+3}{x} > 5$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x^2+5x+3}{x} < 0 \\ \dfrac{2x^2+7x+3}{x} < 0 \end{cases}$ hoặc $\dfrac{2x^2-5x+3}{x} > 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le x \le -\dfrac{1}{2} \text{ hay } x > 0 \\ x < -\dfrac{3}{2} \quad \text{hay } -1 < x < 0 \end{cases}$ hoặc $(0 < x < 1$ hoặc $x > \dfrac{3}{2})$

Kết hợp thì có tập nghiệm: $S = [-3; -\dfrac{3}{2}) \cup (-1; -\dfrac{1}{2}] \cup [0; 1) \cup (\dfrac{3}{2}; +\infty)$.

Ví dụ 15: Tìm m để bất phương trình có tập nghiệm là 1 đoạn có độ dài bằng 5.

a) $x^2-(2m-1)x+2m-2 \le 0$. b) $x^2+2mx-3m^2 \ge 0$.

Giải

a) Tam thức bậc 2 có 2 nghiệm $x_1 = 1$, $x_2 = 2m-2$ và $a = 1 > 0$ nên BPT có tập nghiệm là $[x_1, x_2]$ hoặc $[x_2, x_1]$. Điều kiện độ dài đoạn nghiệm bằng 5 là: $(2m-2)-1 = 5$ hoặc $1-(2m-2) = 5$, do đó $m = 4$ hoặc $m = -1$.

b) BPT $\Leftrightarrow (x-m)(x+3m) \geq 0$, vì $a = 1 > 0$ nên tập nghiệm là $(-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$: không thoả. Vậy không tồn tại m.

DẠNG 3: HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Phương pháp:

– Giải riêng từng bất phương trình của hệ
– Tìm giao các tập nghiệm của các bất phương trình của hệ.

Chú ý:

– Có thể kết hợp gọn.
– Minh hoạ trục số và gạch bỏ để tìm giao các tập nghiệm.
– Bài toán biện luận, tìm điều kiện hệ có nghiệm, vô nghiệm, cần phải xem xét đủ các trường hợp.
– Một số bài toán phương trình, bất phương trình có điều kiện được chuyển về hệ bất phương trình.

Ví dụ 1: Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} 2x^2+9x+7>0 \\ x^2+x-6<0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x^2-5x-6\leq 0 \\ -4x^2+12x-5<0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2x^2-5x+4\leq 0 \\ -x^2-3x+10\geq 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x^2+x-6>0 \\ 3x^2-10x+3>0 \end{cases}$

Giải

a) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x<-\frac{7}{2} \text{ hay } x>-1 \\ -3<1<2 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<2$

Vậy tập nghiệm S = (–1; 2)

b) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{4}\leq x\leq 2 \\ x<\frac{1}{2} \text{ hay } x>\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{4}\leq x<\frac{1}{2}$

Vậy tập nghiệm $S = [-\frac{3}{4}; \frac{1}{2})$

c) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq \frac{-5-\sqrt{57}}{4} \text{ hay } x\geq \frac{-5+\sqrt{57}}{4} \\ -5\leq x\leq 2 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm $S = \left[-5; \frac{-5-\sqrt{57}}{4}\right] \cup \left[\frac{-5+\sqrt{57}}{4}; 2\right]$

d) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x<-2 \text{ hay } x>\frac{3}{2} \\ x<\frac{1}{3} \text{ hay } x>3 \end{cases} \Leftrightarrow x<-2 \text{ hay } x>3.$

Vậy tập nghiệm $S = (-\infty, -2) \cup (3; +\infty)$

Ví dụ 2: Giải các hệ bất phương trình

a) $\begin{cases} x^2 - 9 < 0 & (1) \\ (x-1)(3x^2+7x+4) \geq 0 & (2) \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 - 4 > 0 & (1) \\ \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} \geq \dfrac{1}{x} & (2) \end{cases}$

Giải

a) Ta giải từng bất phương trình trong hệ đã cho:

(1) $\Leftrightarrow -3 < x < 3$.

(2): Cho $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$, $3x^2 + 7x + 4 = 0 \Rightarrow x = -1$ hoặc $x = -\dfrac{4}{3}$.

Lập bảng xét dấu thì (2) $\Leftrightarrow -\dfrac{4}{3} < x < -1$ hoặc $x > 1$.

Kết hợp thì được tập nghiệm $S = [-\dfrac{4}{3}; -1] \cup (1; 3)$.

b) (1) $\Leftrightarrow x < -2$ hoặc $x > 2$.

(2) $\Leftrightarrow \dfrac{x(x+2) + x(x+1) - x(x+1)(x+2)}{x(x+1)(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 2}{x(x+1)(x+2)} \geq 0$

BXD:

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		-1		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-2	+		+	0	−		−		−	0	+		
$x(x+1)$	+		+		+	0	−	0	+		+		
$x+2$	−	0	+	0	+		+		+		+		
VT	−	‖	+	0	−	‖	−	‖	−	0	+		

Do đó (2) $\Leftrightarrow -2 < x \leq -\sqrt{2}$ hoặc $-1 < x < 0$ hoặc $x \geq \sqrt{2}$.

Kết hợp thì được tập nghiệm $S = (2; +\infty)$.

Ví dụ 3: Giải các hệ bất phương trình:

a) $\begin{cases} (x^2 - 8x)^2 < (x+10)^2 & (1) \\ (x^2 - 16x + 21)^2 > 36x^2 & (2) \end{cases}$

b) $-4 \leq \dfrac{x^2 - 2x - 7}{x^2 + 1} \leq \dfrac{4}{5}$

Giải

a) (1) $\Leftrightarrow (x^2 - 8x + x + 10)(x^2 - 8x - x - 10) < 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 7x + 10)(x^2 - 9x - 10) < 0$

Lập bảng xét dấu thì được tập nghiệm: $S_1 = (-1; 2) \cup (5; 10)$

(2) $\Leftrightarrow (x^2 - 16x + 21 + 6x)(x^2 - 16x + 21 - 6x) > 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 10x + 21)(x^2 - 22x + 21) > 0$

Lập bảng xét dấu thì được tập nghiệm: $S_2 = (-\infty; 0) \cup (3; 7) \cup (21; +\infty)$.

Vậy tập nghiệm: $S = S_2 \cap S_2 = (-1; 1) \cup (5; 7)$.

b) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - 2x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 10x - 39 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{3}{5} \text{ hay } x \geq 1 \\ -3 \leq x \leq 13 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -3 \leq x \leq -\frac{3}{5}$ hoặc $1 \leq x \leq 13$.

Vậy $S = [-3; -\frac{3}{5}] \cup [1; 13]$.

Ví dụ 4: Tìm các tham số để hệ bất phương trình có nghiệm:

a) $\begin{cases} x^2 + 2x - 15 < 0 \quad (1) \\ (m+1)x \geq 3 \quad (2) \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 1 < 7x - 2 \quad (1) \\ x^2 - 2ax + 1 \leq 0 \quad (2) \end{cases}$

Giải

a) (1) $\Leftrightarrow -5 < x < 3$. Giải (2):

Nếu $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ thì BPT: $0x \geq 3$: vô nghiệm nên hệ vô nghiệm.

Nếu $m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$ thì nghiệm của BPT là: $x \geq \frac{3}{m+1}$

Điều kiện có nghiệm: $\begin{cases} \frac{3}{m+1} < 3 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$.

Nếu $m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -1$ thì nghiệm của BPT là $x \leq \frac{3}{m+1}$

Điều kiện có nghiệm $\begin{cases} \frac{3}{m+1} < -5 \\ m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -\frac{8}{5}$.

Vậy hệ có nghiệm khi và chỉ khi $m \leq -\frac{8}{5}$ hoặc $m > 0$.

b) (1) $\Leftrightarrow 3x > 3 \Leftrightarrow x > 1$. Giải (2): $\Delta' = a^2 - 1$.

– Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$.

Với $a = 1$, nghiệm của bất phương trình là $x = 1$ nên hệ vô nghiệm.

Với $a = -1$, nghiệm của bất phương trình là $x = -1$ nên hệ vô nghiệm.

– Nếu $\Delta' < 0$ hay $-1 < a < 1$ thì bất phương trình (2) vô nghiệm nên hệ vô nghiệm.

– Nếu $\Delta' > 0$ hay $a < -1$ hoặc $a > 1$ thì tam thức ở vế trái của (2) có hai nghiệm phân biệt: x_1, x_2 nên (2) $\Leftrightarrow x_1 \leq x \leq x_2$ (giả sử $x_1 < x_2$).

Theo định lí Viet, ta có $x_1x_2 = 1$ và $x_1 + x_2 = 2a$.

Khi $a < -1$ thì cả hai nghiệm x_1 và x_2 đều âm nên hệ vô nghiệm.

Khi $a > 1$ thì hai nghiệm x_1 và x_2 đều dương, vì $x_1x_2 = 1$ và $x_1 \neq x_2$ nên $x_1 < 1 < x_2$. Do đó, hệ có nghiệm.

Vậy hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $a > 1$.

Ví dụ 5: Xác định m để hệ bất phương trình sau đây vô nghiệm:

a) $\begin{cases} x^2 - 7x - 8 < 0 \\ m^2x + 1 > (2m-1)x + 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + 11x + 10 < 0 & (1) \\ m^2(x+2) + 1 > 3 + (3m-2)(x+2) & (2) \end{cases}$

Giải

a) Ta có hệ tương đương $\begin{cases} -1 < x < 8 \\ (m-1)^2 x > 2 \end{cases}$. Xét các trường hợp sau:

Nếu m = 1: Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 8 \\ 0.x > 2 \end{cases}$: vô nghiệm

Nếu $m \neq 1$: Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 8 \\ x > \dfrac{2}{(m-1)^2} \end{cases}$.

Điều kiện hệ vô nghiệm:

$$\frac{2}{(m-1)^2} \geq 8 \Leftrightarrow (m-1)^2 \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m-1 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}, \ (m \neq 1)$$

Vậy hệ vô nghiệm khi $\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}$.

b) (1) $\Leftrightarrow -10 < x < -1$.

Đặt t = x + 2 thì (2) $\Leftrightarrow m^2t + 1 > 3 + (3m-2)t \Leftrightarrow (m^2 - 3m + 2) > 2$

– Nếu m = 1 hoặc m = 2 thì (2) $\Leftrightarrow 0t > 2$: vô nghiệm nên hệ vô nghiệm.

– Nếu m < 1 hoặc m > 2 thì $m^2 - 3m + 2 > 0$, do đó: (2) $\Leftrightarrow t > \dfrac{2}{m^2 - 3m + 2}$

Điều kiện $-10 < x < -1$ trở thành $-8 < t < 1$

Điều kiện hệ vô nghiệm là: $\dfrac{2}{m^2 - 3m + 2} \geq 1 \Leftrightarrow 2 \geq m^2 - 3m + 2$

(vì $m^2 - 3m + 2 > 0$) $\Leftrightarrow m^2 - 3m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 3$.

Kết hợp thì $0 \leq m < 1$ hoặc $2 < m \leq 3$.

– Nếu $1 < m < 2$ thì $m^2 - 3m + 2 < 0$, do đó: (2) $\Leftrightarrow t < \dfrac{2}{m^2 - 3m + 2}$.

Điều kiện hệ vô nghiệm là:

$$\frac{2}{m^2 - 3m + 2} \leq -8 \Leftrightarrow 2 \geq -8(m^2 - 3m + 2) \text{ (vì } m^2 - 3m + 2 < 0)$$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 12m + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (2m-3)^2 \geq 0$: Đúng

Vậy giá trị m cần tìm là $0 \leq m \leq 3$.

Ví dụ 6: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

a) $\begin{cases} x^2 - 2mx \leq 0 \\ |x - 1 + m| \leq 2m \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + 2x + (m+1) \leq 0 \\ x^2 - 4x - 6(m+1) < 0 \end{cases}$

Giải

a) Trước hết nếu hệ có nghiệm thì $m \geq 0$

Với $m \geq 0$, hệ $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2m \\ -2m \leq x-1+m \leq 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2m \\ -3m+1 \leq x \leq m+1 \end{cases}$

Do đó hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi: $\begin{bmatrix} 2m = -3m+2 \\ m+1 = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m = \frac{1}{5} \\ m = -1 \end{bmatrix}$,

chọn $m = \frac{1}{5}$

b) Để ý bất phương trình đầu có tập nghiệm là $\varnothing$ hoặc $\{-1\}$ hoặc $[x_1, x_2]$, còn bất phương trình sau có tập nghiệm là $\varnothing$ hoặc (x_3, x_4). Do đó để hai bất phương trình tương đương thì bất phương trình đầu phải có nghiệm duy nhất: $\Delta_1 = 0 \Rightarrow 1 - (m-1) = 0 \Rightarrow m = 0$.

Thử lại khi $m = 0$ thì hệ:

$$\begin{cases} x^2+2x+1 \leq 0 \\ x^2-4x-6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 \leq 0 \\ x^2-4x-6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2-4x-6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất khi $m = 0$.

Ví dụ 7: Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} x^2-2x+1-m \leq 0 \\ x^2-(2m+1)x+m^2+m \leq 0 \end{cases}$

Giải

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq x \leq m+1 & (1) \\ f(x) = x^2-2x+1-m \leq 0 & (2) \end{cases}$$

Trước hết, nếu hệ có nghiệm thì bất phương trình (2) có nghiệm

$\Rightarrow \Delta' = 1 - (1-m) = m \geq 0$, lúc đó:

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq x \leq m+1 \\ 1-\sqrt{m} \leq x \leq 1+\sqrt{m} \end{cases}$$

Ta giải bài toán ngược là tìm $m \geq 0$ để hệ vô nghiệm

Vì $m \geq 0$ nên $m + 1 > 1 - \sqrt{m}$, do đó hệ vô nghiệm khi

$$1 + \sqrt{m} < m \Leftrightarrow \sqrt{m} < m - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < m^2-2m+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m^2-3m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ hay } m > \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy hệ có nghiệm khi: $0 \leq m \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 8: Giải biện luận hệ bất phương trình:

a) $\begin{cases} x^2 - x - 12 < 0 \quad (1) \\ (2-m)x > 3 - m \quad (2) \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + (a+1)x + a \le 0 \\ x^2 + (2a+4)x + 8a \le 0 \end{cases}$

Giải

a) (1) $\Leftrightarrow -3 < x < 4$. Xét $m = 2$ thì (2) $\Leftrightarrow 0x > 1$: vô nghiệm nên hệ vô nghiệm.

Xét $m \neq 2$, ta so sánh $\frac{m-3}{m-2}$ với -3 và 4 bằng cách xét dấu các hiệu:

$E = \frac{m-3}{m-2} + \frac{4m-9}{m-2}$, $F = \frac{m-3}{m-2} - 4 = \frac{5-3m}{m-2}$

$E > 0 \Leftrightarrow (4m-9)(m-2) > 0 \Leftrightarrow m < 2$ hoặc $m > \frac{9}{4}$

$E < 0 \Leftrightarrow (4m-9)(m-2) < 0 \Leftrightarrow 2 < m < \frac{9}{4}$

$F > 0 \Leftrightarrow (5-3m)(m-2) > 0 \Leftrightarrow \frac{5}{3} < m < 2$

$F < 0 \Leftrightarrow (5-3m)(m-2) < 0 \Leftrightarrow m < \frac{5}{3}$ hoặc $m > 2$.

Từ đó có các trường hợp:

Nếu $m \le \frac{5}{3}$: (2) $\Leftrightarrow x < \frac{m-3}{m-2}$. Hệ có nghiệm $\frac{m-3}{m-2} < x < 4$

Nếu $\frac{5}{3} < m < 2$: (2) $\Leftrightarrow x < \frac{m-3}{m-2}$. Hệ có nghiệm $-3 < x < 4$

Nếu $2 < m < \frac{9}{4}$: (2) $\Leftrightarrow x > \frac{m-3}{m-2}$. Hệ có nghiệm $-3 < x < 4$

Nếu $m \ge \frac{9}{4}$: (2) $\Leftrightarrow x < \frac{m-3}{m-2}$. Hệ có nghiệm $\frac{m-3}{m-2} < x < 4$

b) Ta có hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x+a) \le 0 \\ (x+4)(x+2a) \le 0 \end{cases}$

So sánh các nghiệm -1, $-a$, -4, $-2a$, ta xét các trường hợp sau:

Nếu $a \le 0$ thì $-4 < -1 < -a \le -2a$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le -a \\ -4 \le x \le -2a \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x \le a$

Nếu $0 < a \le \frac{1}{2}$ thì $-4 < -1 \le -2a < -a$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le -a \\ -4 \le x \le -2a \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x \le -2a$

Nếu $\frac{1}{2} < a \le 1$ thì $-4 < -2a < -1 \le -a$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le -a \\ -4 \le x \le -2a \end{cases}$: vô nghiệm.

Nếu $1 < a \le 2$ thì $-4 \le -2a < -a < -1$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} -a \le x \le -1 \\ -4 \le x \le -2a \end{cases}$: vô nghiệm.

Nếu $2 < a \le 4$ thì $-2a < -4 \le -a < -1$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} -a \le x \le -1 \\ -2a \le x \le -2a \end{cases}$: vô nghiệm.

Nếu $a > 4$ thì $-2a < -a < -4 < -1$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} -a \le x \le -1 \\ -2a \le x \le -4 \end{cases} \Leftrightarrow -a \le x \le -4$

Vậy: Khi $a \le 0$: $S = [-1; -a]$. Khi $0 < a \le \frac{1}{2}$: $S = [-1; -2a]$

Khi $\frac{1}{2} < a \le 4$: $S = \varnothing$. Khi $a > 4$: $S = [-a; -4]$.

Ví dụ 9: Với giá trị nào của m thì hai nghiệm của phương trình:

$2x^2 - (3m + 1)x + m^2 + m = 0$ cũng là nghiệm của bất phương trình:

$x^2 - mx - 3m - 1 \le 0$

Giải

Phương trình $2x^2 - (3m + 1)x + m^2 + m = 0$ có hai nghiệm là m và $\frac{m+1}{2}$.

Đặt $f(x) = x^2 - mx - 3m - 1$.

Điều kiện để m và $\frac{m+1}{2}$ là nghiệm của bất phương trình $f(x) \le 0$ là:

$$\begin{cases} f(m) \le 0 \\ f\left(\frac{m+1}{2}\right) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m+1 \ge 0 \\ m^2+12m+3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge -\frac{1}{3} \\ m \le -6-\sqrt{33} \text{ hay } m \ge -6+\sqrt{33} \end{cases}.$$

Chọn $m \ge -6 + \sqrt{33}$

DẠNG 4: DẤU TAM THỨC TRÊN MỘT MIỀN

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \ne 0$.

– Dấu f(x) không đổi trên **R** ta đã giải ở dạng 1, phần này giải quyết bài toán f(x) không đổi dấu trên một khoảng, một đoạn, hợp các nửa khoảng, đoạn... Bằng cách xét các trường hợp dấu của Δ và hệ số a khá phức tạp nên ta thường chuyển qua bài toán về đồ thị đường thẳng, đồ thị parabol; sử dụng các nghiệm đặc biệt của tam thức; đánh giá tham số với một biểu thức, hàm số dạng: $m \ge g(x)$, $m > g(x)$, $m \le g(x)$, $m < g(x)$...; chuyển điều kiện $x > a$, $x \ge a$, $x < a$, $x \le a$ thành $t > 0$, $t \ge 0$, $t < 0$, $t \le 0$ nhờ ẩn phụ $t = x - a$;...

Chú ý:

1) $\forall x \in D, m \geq f(x) \Leftrightarrow m \geq \max\limits_{x \in D} f(x)$

$\forall x \in D, m \leq f(x) \Leftrightarrow m \leq \min\limits_{x \in D} f(x)$

$\exists x \in D, m \geq f(x) \Rightarrow m \geq \min\limits_{x \in D} f(x)$

$\exists x \in D, m \leq f(x) \Leftrightarrow m \leq \max\limits_{x \in D} f(x)$

2) Tam thức bậc hai f(x) có 2 nghiệm x_1, x_2:

$x_1 > x_2 > 0 \Leftrightarrow \Delta > 0, P > 0, S > 0$; $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P < 0$

$x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \Delta < 0, P > 0, S < 0$.

Ví dụ 1: Tìm m để $(m^2 + 1)x + m(x + 3) + 1 > 0, \forall x \in [-1; 2]$

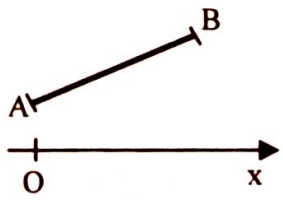
Giải

Bất phương trình $\Leftrightarrow (m^2 + m + 1)x + 3m + 1 > 0$

Đặt $f(x) = (m^2 + m + 1)x + 3m + 1$. Với mỗi giá trị của m, đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là đường thẳng. Gọi A, B là 2 điểm thuộc đường thẳng có hoành độ $x = -1, x = 2$.

Do đó $f(x) > 0$ với mọi $x \in [-1; 2]$ khi và chỉ khi đoạn thẳng AB nằm phía trên trục hoành tức là A và B ở phía trên Ox:

$$\begin{cases} f(-1) > 0 \\ f(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 2m > 0 \\ 2m^2 + 5m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(2 - m) > 0 \\ (2m + 3)(m + 1) > 0 \end{cases}$$



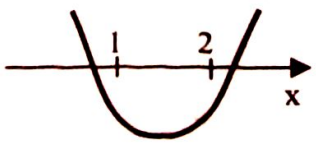
Giải ra được: $0 < m < 2$

Ví dụ 2: Xác định m sao cho bất phương trình: $f(x) = x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0$ được nghiệm đúng $\forall x \in [1; 2]$.

Giải

Ta có: $y = f(x) = x^2 - 2x + 1 - m^2$ là hàm bậc hai có $a = 1 > 0$ nên bề lõm hướng lên, do đó: $f(x) \leq 0, \forall x \in [1; 2]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(1) \leq 0 \\ f(2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 \leq 0 \\ 1 - m^2 \leq 0 \end{cases}$$



$\Leftrightarrow m^2 \geq 1 \Leftrightarrow m \leq -1$ hoặc $m \geq 1$.

Cách khác: $f(x) \leq 0, \forall x \in [1; 2] \Leftrightarrow m^2 \geq (x - 1)^2, \forall x \in [1; 2]$.

$\Leftrightarrow m^2 \geq \max\limits_{1 \leq x \leq 2} (x - 1)^2 \Leftrightarrow m^2 \geq 1 \Leftrightarrow m \leq -1$ hoặc $m \geq 1$.

Ví dụ 3: Tìm m để bất phương trình: $f(x) = x^2 + (1 - 3m)x + 3m - 2 > 0$ nghiệm đúng với mọi x mà $|x| \geq 2$.

Giải

BPT $\Leftrightarrow (x - 1)(x - 3m + 2) > 0$

Tam thức bậc hai có 2 nghiệm $x = 1$ và $x = 3m - 2$

Xét $3m - 2 = 1 \Leftrightarrow m = 1$ thì $f(x) = (x - 1)^2 > 0, \forall x \neq 1$

$\Rightarrow f(x) > 0, \forall x$ mà $|x| \geq 2$.

Xét $3m - 2 > 1 \Leftrightarrow m > 1$ thì $\Rightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$ hoặc $x > 3m - 2$.

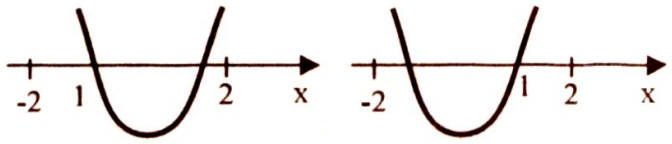
Điều kiện $f(x) > 0, \forall x$ mà $|x| \geq 2$ là $3m - 2 < 2 \Leftrightarrow m < \frac{4}{3}$

Kết hợp thì $1 < m < \frac{4}{3}$.

Xét $3m - 2 < 1 \Leftrightarrow m < 1$ thì $f(x) > 0 \Leftrightarrow x < 3m - 2$ hoặc $x > 1$.
Điều kiện $f(x) > 0, \forall x$ mà $|x| \geq 2$ là $3m - 2 > -2 \Leftrightarrow m > 0$

Kết hợp thì $0 < m < 1$. Vậy điều kiện cần tìm là $0 < m < \frac{4}{3}$.

Cách khác: TTB2 có 2 nghiệm $x = 1, x = 3m - 2$
Vì $1 \in (-2; 2)$ và TTB2 có hệ số $a = 1 > 0$ nên $f(x) > 0, \forall x$ mà $|x| \geq 2$.
$\Leftrightarrow -2 < 3m - 2 < 2$
$\Leftrightarrow 0 < m < \frac{4}{3}$.



Ví dụ 4: Xác định m để tam thức: $f(x) = x^2 + (3 - m)x - 2m + 3$ luôn luôn dương với mọi $x \leq -4$.

Giải

Đặt $t = x + 4$ thì $x \leq -4 \Leftrightarrow t \leq 0$
Ta có: $x = t - 4$ nên $f(x) = g(t) = (t - 4)^2 + (3 - m)(t - 4) - 2m + 3$
$= t^2 - (m + 5)t + 7 + 2m$
Do đó $f(x) > 0, \forall x \leq -4 \Leftrightarrow g(t) > 0, \forall t \leq 0$.
$\Delta = (m + 5)^2 - 4(7 + 2m) = m^2 + 2m - 3$.
Xét $\Delta < 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -3 < m < 1$ thì:
$g(t) > 0, \forall t \Rightarrow g(t) > 0, \forall t \leq 0$.
Xét $\Delta \geq 0 \Rightarrow m^2 + 2m - 3 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$.
Vì $a > 0$ nên $g(t) > 0, \forall t \leq 0$.
$\Leftrightarrow t_1 \geq t_2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 5 \geq 0 \\ 7 + 2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -5 \\ m \geq -\frac{7}{2} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m \geq -\frac{7}{2}$. Kết hợp thì $-\frac{7}{2} \leq m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$

Vậy giá trị cần tìm là $m \geq -\frac{7}{2}$.

Ví dụ 5: Tìm m để bất phương trình: $f(x) = x^2 - 2(m + 1)x - 2m + 3 > 0$ được nghiệm đúng $\forall x > 0$.

Giải

TTB2 f(x) có 2 nghiệm $x = -1, x = 2m + 3$ và $a = 1 > 0$.
Nếu $m = -2$ thì có nghiệm kép.
$f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 > 0, \forall x \neq -1$: chọn

Nếu $m \neq -2$ thì $f(x) > 0, \forall x > 0$

$\Leftrightarrow x_1 < x_2 \leq 0 \Leftrightarrow 2m + 3 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -\frac{3}{2}$ $(m \neq -2)$

Vậy giá trị m cần tìm là $m \leq -\frac{3}{2}$.

Ví dụ 6: Hãy tìm m sao cho bất phương trình:

$f(x) = (m - 1)x^2 + 2x + m + 1 > 0$ được nghiệm đúng $\forall x > 0$.

Giải

- Xét $m = 1$: $f(x) = 2x + 2 > 0, \forall x > -1$: chọn
- Xét $m < 1$: TTB2 có $\Delta' = 1 - (m - 1)(m + 1) = 2 - m^2$

Nếu $\Delta' \leq 0$ thì $f(x) \leq 0, \forall x$: loại

Nếu $\Delta' > 0$ thì $f(x) > 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$: loại

- Xét $m > 1$:

Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 2 - m^2 < 0 \Leftrightarrow m^2 > 0$. Chọn $m > \sqrt{2}$.

Ta có $f(x) > 0, \forall x$: chọn

Nếu $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m^2 \leq 2$. Chọn $1 < m \leq \sqrt{2}$.

Vì $a = m - 1 > 0$ nên $f(x) > 0, \forall x > 0$

$$\Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P \geq 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m+1}{m-1} \geq 0 \\ \frac{-2}{m-1} < 0 \end{cases}$$: Đúng vì $m > 1$

Vậy giá trị cần tìm là $m \geq 1$.

Ví dụ 7: Xác định giá trị m lớn nhất để: $x(x + 2)(x + 4)(x + 6) \geq m, \forall x$ (*)

Giải

Ta có $x(x + 2)(x + 4)(x + 6) = x(x + 6)(x + 2)(x + 4) = (x^2 + 6x)(x^2 + 6x + 8)$

Đặt $t = x^2 + 6x + 4$ thì $t = (x + 3)^2 - 5 \geq -5$

$(*) \Leftrightarrow (t - 4)(t + 4) \geq m, \forall t \geq -5 \Leftrightarrow m \leq t^2 - 16, \forall t \geq -5.$

$\Leftrightarrow m \leq \min\limits_{t \geq -5}(t^2 - 16) \Leftrightarrow m \leq -16.$

Vì $t^2 - 16 \leq -16$, dấu = xảy ra khi $t = 0 \geq -5$.

Chú ý: Có thể đặt $t = x^2 + 6x$, $t = x^2 + 6x + 8$

hoặc $t = x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2, t \geq 0$.

Ví dụ 8: Tìm m để $mx^4 + 2mx^3 - 4x^2 - 2mx + m > 0, \forall x$.

Giải

Xét $x = 0$ thì $m > 0$. Xét $x \neq 0$, cho 2 vế cho $x^2 > 0$

$$mx^2 + 2mx - 4 - \frac{2m}{x} + \frac{m}{x^2} > 0 \Leftrightarrow m\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2m\left(x - \frac{1}{x}\right) - 4 > 0$$

Đặt $t = x - \frac{1}{x}$ thì $x^2 - tx - 1 = 0$. Vì phương trình này có $\Delta = t^2 + 4 > 0, \forall t$ nên $t \in \mathbf{R}$.

Ta có: $t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$

Bài toán trở thành tìm m để: $m(t^2 + 2) + 2mt - 4 > 0, \forall t$

$\Leftrightarrow mt^2 + 2mt + 2m - 4 > 0, \forall t$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^2 - m(2m-4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -m^2 + 4m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < 0 \text{ hay } m > 4 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m > 4.$

C. BÀI LUYỆN TẬP

1. Xét dấu các tam thức bậc hai:

a) $-4x^2 + 12x - 9$ b) $3x^2 - 2x - 8$

c) $-6x^2 + 3\sqrt{2}\,x - 5$ d) $2x^2 - 6\sqrt{2}\,x + 9.$

HD: lập Δ và xét dấu hệ số a

2. Xét dấu: a) $\frac{1}{x^2 + x - 6}$ b) $\frac{4 - x}{2x^2 - 3x - 5}$

c) $(x^2 - 2x - \frac{1}{2})^2 - (2x - \frac{7}{2})^2$ d) $\frac{1}{x^2 - 7x + 12} - \frac{1}{x^2 - 5x + 4}$

HD: đưa về xét dấu các tam thức bậc hai, tích các tam thức bậc hai

3. Tìm m để bất phương trình thoả $\forall x$:

a) $3x^2 + 2(m-1)x + m + 4 \geq 0$ b) $(m-1)x^2 + (2m+1)x + m + 1 \geq 0$

c) $(m-2)x^2 - 2(m-1)x + m - 1 \leq 0$ d) $mx^2 + 12x - 5 \leq 0$

ĐS: c) $m \leq 1$ d) $m \leq -\frac{36}{5}$

4. Tìm m để :

a) $\frac{4x^2 - 6x + 5}{x^2 + (m+1)x + 2m + 7} > 0, \forall x$ b) $\frac{(m-5)x^2 - 4mx + m - 2}{-x^2 + 2mx - 3 - m^2} \leq 0, \forall x$

ĐS: a) $-3 < m < 9$

5. Tìm điều kiện để bất phương trình:

a) $x^2 + bx + c > 0$ vô nghiệm b) $x^2 + 2mx + 3 < 0$ có nghiệm.

c) $(2m^2 + m - 6)x^2 + (2m - 3)x - 1 > 0$ vô nghiệm

6. Tìm a để:

a) $1 \leq \frac{3x^2 - ax + 5}{2x^2 - x + 1} < 6, \forall x$ b) $\left|\frac{x^2 + x + 4}{x^2 - ax + 4}\right| \leq 2, \forall x$

ĐS: a) $0 < m \leq 5$

7. Tìm m để:

a) $x^2 + 4y^2 + 2x + my + 3 > 0, \forall x, \forall y$

b) $25y^2 + \frac{1}{100} \geq x - mxy + y - 25y^2, \forall x = y, \forall x = -y$

c) $9x^2 + 20y^2 + 4z^2 - 12xy + myz + 6xz > 0$, $\forall x,y,z: x^2+y^2+z^2 \neq 0$

ĐS: a) $|m| < 4\sqrt{2}$ b) $m = 50$

ABC

8. Tìm tham số để tập xác định hàm số là **R**:

a) $y = \sqrt{(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3}$

b) $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{\sqrt{(1-m)x^2 - 2mx + 5 - 9m}}$

ĐS: a) $m > 1$ b) $m < \dfrac{1}{2}$

9. Chứng minh bất đẳng thức:

a) $x^2 + 5y^2 - 4xy + 2x - 6y + 3 > 0, \forall x, \forall y$

b) $y^2x^4 - 4yx^3 + 2(y^2 + 2)x^2 + 4xy + y^2 \geq 0, \forall x, \forall y$

HD: đưa về tam thức bậc hai theo một biến

10. Chứng minh bất đẳng thức :

a) $(x + y)^2 - xy + 1 \geq (x + y)\sqrt{3}, \forall x, \forall y$

b) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca, \forall a, \forall b, \forall c$

c) $19x^2 + 54y^2 + 16z^2 + 36xy - 24yz - 16zx \geq 0, \forall x, \forall y, \forall z$

11. Chứng minh bất đẳng thức:

a) $\dfrac{1}{7} \leq \dfrac{4x^2 + 3x + 1}{4x^2 - 3x + 1} \leq 7, \forall x$

b) $\left|\dfrac{x^2 \cos\alpha - 2x + \cos\alpha}{x^2 - 2x.\cos\alpha + 1}\right| \leq 1, \forall x$

HD: đưa về tam thức bậc hai theo một biến

12. Chứng minh:

a) Nếu $b > c > d$ thì $(a + b + c + d)^2 > 8(ac + bd), \forall a$

b) Nếu a, b, c là 3 cạnh Δ thì $pa^2 + qb^2 > pqc^2, \forall p + q = 1$

c) Nếu abc = 1, $a^3 > 36$ thì $\dfrac{a^2}{3} + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$

13. Chứng minh nếu $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 8 \\ xy + yz + zx = 4 \end{cases}$ thì $-\dfrac{8}{3} \leq x, y, z \leq \dfrac{8}{3}$

HD: đưa về tam thức bậc hai theo một biến có nghiệm

14. Giải bất phương trình:

a) $2x^2 - 5x + 2 < 0$

b) $-2x^2 + 3x - 7 > 0$

c) $x^2 - 7x + 10 < 0$

d) $5x^2 - 4x + 1 \geq 0$

15. Giải các bất phương trình :

a) $(2x + 1)(x^2 + x - 30) > 0$

b) $(-x^2 + 3x - 2)(x^2 - 5x + 6) \geq 0$

c) $5x^3 - 6x^2 + 3x + 14 < 0$

d) $x^3 - x^2 + x - 1 \geq 0$

16. Giải các bất phương trình :

a) $\frac{x^2+3x+3}{1-2x}<0$ b) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}\le 0$

c) $\frac{x^2-4x+3}{3-2x}<1-x$ d) $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}<\frac{3}{x-3}$

ĐS: a) $x<0,\ 1<x<\frac{3}{2}$ d) $x<1,\ \frac{3}{2}<x<2,\ x>3$

17. Giải các bất phương trình:

a) $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2-x+1}\le\frac{2x+3}{x^3+1}$ b) $\frac{x^4-3x^3+2x^2}{x^2-x-30}>0$

c) $\frac{x^3-3x^2-x+3}{x(2-x)}>0$ d) $\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x}\le\frac{-4}{x^2+2x}$

18. Giải các bất phương trình:

a) $x^2+(x+1)^2\le\frac{15}{x^2+x+1}$ b) $x(x+1)(x+2)(x+3)<24$

c) $\frac{(x+1)^3-1}{(x-1)^3+1}>1$ d) $(x+3)^4+(x+5)^4<2$

ĐS: a) $-2\le x\le 1$ c) $x>0$

19. Giải và biện luận bất phương trình :

a) $x^2-mx+m+3>0$ b) $mx^2-2x+4\ge 0$

20. Giải và biện luận:

a) $(m+1)x^2-2mx+2m<0$

b) $(m+1)x^2-2(m-1)x+3m-3\ge 0$

21. Tuỳ theo giá trị của m, tìm miền xác định của hàm số :

a) $y=3x-5+\sqrt{x^2-2mx+2-m}$ b) $y=\frac{\sqrt{mx^2+(m+3)x+3}}{x+1}$

22. Giải và biện luận bất phương trình :

a) $4x^2-2(m+\sqrt{1+m})x+m\sqrt{1+m}\le 0$

b) $f(f(x))>x$ với $f(x)=x^2+bx+1,\ 3<b<\frac{7}{2}$

HD: b) đưa về bất phương trình tích số

23. Tìm m để:

a) Bất phương trình: $x^2+6x+7-m\le 0$ có nghiệm là một đoạn có độ dài bằng 2.

b) Phương trình: $x^2+mx+1=0$ có hai nghiệm: $(\frac{x_1}{x_2})^2+(\frac{x_2}{x_1})^2>7$

ĐS: a) $m=-1$ b) $|m|>\sqrt{5}$

24. Tìm m để phương trình :

a) $x^2 + mx + 1 + m = 0$ có nghiệm

b) $(m-5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$ có nghiệm

c) $(m^2 + 3m + 4)x^2 - 2mx - m^2 + m - 1 = 0$ có 2 nghiệm trái dấu.

25. Tìm m để hệ sau có nghiệm:

a) $\begin{cases} x^2 + 2x - 3 \le 0 \\ (m-1)x > 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + xy = m \\ x^2 + y^2 = m \end{cases}$

ĐS: b) $0 \le m \le 8$

26. Tìm m để mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2) :

a)(1): $x^2 - 3x + 2 = 0$; (2): $mx^2 - (3m+1)x + 3 > 0$

b)(1): $2x^2 - (3m+1)x + m^2 + m = 0$ (2): $x^2 - mx - 3m - 1 \le 0$

ĐS: a) $m < \frac{1}{2}$ b) $m \ge \sqrt{33} - 6$

27. Tìm nghiệm (x,y) của bất phương trình:

$5x^2 + 5y^2 - 5x - 15y + 8 \le 0$ mà x+3y bé nhất.

28. Chứng minh: $3(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}) + 10 \ge 8(\frac{x}{y} + \frac{y}{x})$ $\forall x$,y khác 0.

HD: đặt $t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, |t| \ge 2$

29. Tìm GTLN, NN:

a) $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$ b) $y = \left(\frac{12x(x-a)}{x^2 + 36}\right)^4$

HD: chuyển hàm số về phương trình

30. Tìm GTLN, NN:

a) $A = \frac{a^2 + 4ab + 2b^2}{a^2 + 3b^2}$ b) $B = \frac{x + 2y + 1}{x^2 + y^2 + 7}$

31. Cho $(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0$.

Tìm GTLN, NN của $S = x^2 + y^2$. **ĐS:** $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

32. a) Cho $f(x) = \frac{20x^2 + 10x + 3}{3x^2 + 2x + 1}$. Tìm GTLN, NN.

b) Chứng minh phương trình: $f(x) = x^2 + 2(2m-3)x + 5m^2 - 16m + 20$ vô nghiệm.

33. Chứng minh phương trình luôn luôn có hai nghiệm phân biệt:

a) $x^2 + 2(m+1)x - 4m - 15 = 0$

b) $(m^2+1)x^2 + 4mx - 4m^2 - 8m - 5 = 0$

HD: chứng minh $\Delta > 0$ với mọi m

33. Chứng minh phương trình luôn luôn có nghiệm:

a) $m(x^2-9)+x(x-5)=0$

b) $m^2(x-2)+m(x-1)(x-2)+3(x-1)=0$

34. Cho a, b, c là ba số đôi một khác nhau.
Chứng minh phương trình $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt.

35. Cho a, b, c là ba số đôi một khác nhau và khác không. Chứng minh phương trình luôn có nghiệm.:

a) $ab(x-a)(x-b)+bc(x-b)(x-c)+ca(x-c)(x-a)=0$

b) $a(x-b)(x-c)+b(x-c)(x-a)+c(x-a)(x-b)=0$

HD: chứng minh $\Delta \geq 0$ với mọi tham số

36. Chứng minh phương trình: $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm khi:

a) $2a+3b+6c=0$ b) $\frac{a}{m+2}+\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}=0, m>0$

c) $5a+3b+2c=0$ d) $3a+b+7c=0$

37. Chứng minh phương trình luôn luôn có nghiệm:

a) $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0, \forall a,b,c$ phân biệt.

b) $\frac{a^2}{x-p}+\frac{b^2}{x-q}=1, \forall a, b\neq 0$

c) $(x-a)(x-c)+m(x-b)(x-d)=0, \forall m$; $a<b<c<d$

38. Tìm m để các phương trình sau có nghiệm:

a) $(m-2)x^2+2(2m-3)x+5m-6=0$

b) $(3-m)x^2-2(m+3)x+m+2=0$

HD: xét a =0 và a ≠0

39. Tìm m để phương trình :

a) $x^2 + 2(m + 1)x + 9m - 5 = 0$ có 2 nghiệm âm phân biệt

b) $(m - 2)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt

40. Tìm m để phương trình : $(m - 2)x^4 - 2(m + 1)x^2 + 2m - 1 = 0$

a) có 1 nghiệm b) có 4 nghiệm phân biệt

41. Tìm giá trị m để phương trình : $(3-m)x^2+2mx+m+2=0$

a) Có hai nghiệm nhỏ hơn 1. b) Có hai nghiệm lớn hơn 3.

HD: đặt a) t = x –1, b) u = x – 3

42. Xác định m để phương trình: $(m+3)x^2-3(m-1)x+4m=0$:

a) Có nghiệm kép. b) Có đúng một nghiệm.

43. Tìm m để phương trình: $(m+1)x^2+2(m-2)x-3m+3=0$:

a) có hai nghiệm trái dấu.

b) có hai nghiệm phân biệt và đều lớn hơn 1.

c) có 1 nghiệm thuộc (–1;1) còn 1 nghiệm nằm ngoài [–3;3].

HD: a + b + c = 0

44. Định m để phương trình: $x^3 + 2(1-2m)x^2 + (5-7m)x + 2m + 10 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt nhỏ hơn 1.

HD: đưa về phương trình tích số

45. Tìm tham số để phương trình:

a) $(a+1)x^2 - (8a+1)x + 6a = 0$ có đúng 1 nghiệm thuộc $(0;1)$.

b) $x^2 - 2(m-1)x + m + 5 = 0$ có đúng một nghiệm dương

46. Tìm tham số để phương trình:

a) $x^2 - 2x + 7 - 2m = 0$ có nghiệm $x > 3$

b) $2(4-x^2) + \sqrt{4-x^2} + m + 1 = 0$ có nghiệm.

c) $x^2 + (x+1)^2 = \dfrac{m}{x^2+x+1}$ có nghiệm.

ĐS: c) $m \geq \dfrac{3}{8}$

47. Tìm tham số để phương trình:

a) $(m-1)x^2 - 4mx + 3m + 10 = 0$ có nghiệm $|x| \geq 2$.

b) $mx^2 - (2m^3 - m^2 - 3)x - m = 0$ có nghiệm $x \in [-1;1]$.

c) $(m+1)x^2 - 4(m+1)x + 3 = 0$ có nghiệm $x \geq 2$.

48. Tìm tham số để phương trình:

a) $x^4 + 3x^3 - 2mx^2 + 3x + 1 = 0$ có nghiệm.

b) $x^4 + ax^3 + x^2 + ax + 1 = 0$ có không ít hơn 2 nghiệm âm phân biệt.

ĐS: b) $a > \dfrac{3}{2}$

49. Tìm ĐK có nghiệm: $(1+a)(\dfrac{x^2}{1+x^2})^2 - 3a(\dfrac{x^2}{1+x^2}) + 4a = 0$.

HD: đặt ẩn phụ $t = \dfrac{x^2}{1+x^2}, 0 \leq t < 1$

50. Định m để: $f(x) = mx^2 - 4x + 3m + 1 > 0, \forall x > 0$

51. Cho $f(x) = x^2 - 2mx - m$. Định m để $f(x) \geq 0, \forall x > 0$

52. Cho $f(x) = mx^2 - 2(m+1)x - m + 5$. Định m để $f(x) < 0, \ \forall x < -1$.

53. Định m để $f(x) = 2x^2 + mx + 3 \geq 0, \forall x \in [-1;1]$

54. Tìm tham số để:

a) $x^2 - (2m+1)x - 5m < 0, \forall x \in [0;2]$

b) $f(x) = \dfrac{x - 2a - 1}{x - a} \leq 0, \forall x \in [1;2]$.

ABC

55. Định m để:

a) $(x+2)(x+4)(x^2+6x+10) \geq m, \forall x \in R$.

b) $2\cos^2 x + 3m\cos x + 1 \geq 0, \forall x \in \left[0^0, 180^0\right]$

c) $x^3 - 2x^2 - (m-1)x + m \geq \frac{1}{x}, \forall x \geq 2$

d) $x^4 + mx^3 + x^2 + mx + 1 > 0, \forall x$

ĐS: a) $m \leq -1$ d) $|m| \leq \frac{3}{2}$

56. Giải hệ:

a) $\begin{cases} x^2 - 6x + 1 > 0 \\ x^2 + x + 1 < 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x^2 - 10x + 3 > 0 \\ \dfrac{2x^2 + x - 6}{(4-x)(x^2+x+2)} \leq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} > \dfrac{1}{x} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 10 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases}$

57. Giải các hệ bất phương trình: $\frac{1}{13} \leq \frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - 5x + 7} \leq 1$

ĐS: $x \leq -1; -\frac{11}{4} \leq x \leq 3$

58. Tìm m để các bất phương trình sau vô nghiệm:

a) $(m+2)x^2 - 2(m-1)x + 4 < 0$

b) $(m-3)x^2 + (m+2)x - 4 > 0$

59. Tìm x để ba số sau là độ dài 3 cạnh tam giác:

a) $x^2 + x + 1, x^2 - 1, 2x + 1$. Chứng minh có một góc bằng 120^0.

b) $x^2 + 2x + 3, x^2 + 1, x^2 + 4x + 5$. Tính r.

HD: a) dùng định lý hàm số côsin

60. Giải và biện luận:

a) $\begin{cases} 2x^2 + 9x + 7 > 0 \\ x - 2m \leq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x-1)(x-a) \leq 0 \\ (x+2)(x+a) \leq 0 \end{cases}$

61. Giải và biện luận:

a) $\begin{cases} (x^2 - 1)(x - 2) \geq 0 \\ x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + a \leq 0 \end{cases}$

b) $(a^2 - 4)x \leq a - 2 \leq (a^2 - 2a - 3)x$

62. Tìm điều kiện hệ có nghiệm:

a) $\begin{cases} 2x^2 - x - m \leq 0 \\ x^2 - 2x - 3 + m \leq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + \dfrac{4x^2}{(x+2)^2} \geq 5 \\ x^4 + 8x^2 + 16mx + 16m^2 + 32m + 16 = 0 \end{cases}$

ĐS: b) $m = 2$

ABC

63. Tìm điều kiện để hệ có nghiệm duy nhất:

a) $\begin{cases} 2x^2+3x-2\le 0 \\ x^2-m(m+1)x+m^3\le 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+2x+a\le 0 \\ x^2-4x-6a\le 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^4-5x^2+4<0 \\ x^2+(2a+1)x+a^2+a-2=0 \end{cases}$

ĐS: a) m =0, m = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

64. Tìm điều kiện để hệ:

a) $\begin{cases} x^2-9x+8<0 \\ a^2x-2>(3a-2)x \end{cases}$ vô nghiệm

b) $\begin{cases} x^2-5x+4\le 0 \\ x^2-(m^2+3)x+2(m^2+1)\le 0 \end{cases}$ có nghiệm là một đoạn có độ dài bằng 2.

65. Tìm tham số để hệ:

a) $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+y^2\le m \end{cases}$ vô nghiệm b) $\begin{cases} x^2-3x+2\le 0 \\ x^2-6x+m(6-m)\ge 0 \end{cases}$ CN duy nhất

HD: Dùng đồ thị

66. Giải hệ: $\begin{cases} x+y\le 1 \\ x^2+y^2+xy=1 \end{cases}$

67. Tìm điều kiện để hệ có nghiệm: $\begin{cases} 5x^2+2xy-y^2\ge 3 \\ 2x^2+2xy+y^2\le a \end{cases}$

ĐS: a ≥ 1

68. Chứng minh hệ vô nghiệm:

a) $\begin{cases} m^2(1-y^2)\ge x^2 \\ x-m^3\ge my^2 \end{cases}$,m>1 b) $\begin{cases} x^2+y^2\le 4ax \\ y-x^2\ge 2a \end{cases}$,a > 0

69. Tìm điều kiện hệ: $\begin{cases} ax^2+bx+c>0 \\ bx^2+cx+a>0 \\ cx^2+ax+b>0 \end{cases}$ có nghiệm

ĐS: a + b + c >0

70. Tìm điều kiện hệ: $\begin{cases} ax^2+x+1\le 0 \\ x^2+ax+1\le 0 \\ x^2+x+a\le 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

ĐS: a ≤ –2

§5. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Vận dụng xét dấu tam thức bậc hai, nhị thức bậc nhất để giải các phương trình, bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối, chứa căn thức.

B. PHÂN DẠNG TOÁN

DẠNG 1: PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Phá dấu giá trị tuyệt đối bằng cách:

– Dùng định nghĩa $|A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \ge 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$

– Chia miền xét dấu.

– Đặt điều kiện và bình phương, đặt ẩn phụ, đánh giá 2 vế, ...

• Dạng cơ bản:

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) = \pm g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f^2(x) = g^2(x) \end{cases}$$

$$|f(x)| \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x) \le 0 \\ g(x) \ge 0, f(x) \le -g(x) \text{ hay } f(x) \ge g(x) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x) \le 0 \\ g(x) > 0, f^2(x) \ge g^2(x) \end{array}\right.$$

$$|f(x)| \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ -g(x) \le f(x) \le g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f^2(x) \le g^2(x) \end{cases}$$

Chú ý:

$|A| = A \Leftrightarrow A \ge 0$, $|A| = -A \Leftrightarrow A \le 0$

$|A + B| = |A| + |B| \Leftrightarrow AB \ge 0$

$|A - B| = |A| + |B| \Leftrightarrow AB \le 0$

$|A| = |B| \Leftrightarrow A = \pm B$.

Ví dụ 1: Giải các phương trình:

a) $|x^2 - 5x + 4| = x^2 + 6x + 5$ b) $|x - 1| = 2x - 1$

Giải

a) $PT \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 \ge 0 \\ x^2 - 5x + 4 = x^2 + 6x + 5 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 < 0 \\ -x^2 + 5x - 4 = x^2 + 6x + 5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \text{ hay } x \ge 4 \\ 11x = -1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 1 < x < 4 \\ 2x^2 + x + 9 = 0 \ (\Delta < 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \text{ hay } x \ge 4 \\ x = -\dfrac{1}{11} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{14}{11}.$$

b) PT $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1\geq 0 \\ (x-1)^2=(2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq \frac{1}{2} \\ 3x^2-2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq \frac{1}{2} \\ x=0 \text{ hay } x=\frac{2}{3} \end{cases}$

Chọn nghiệm $x = \frac{2}{3}$.

Ví dụ 2: Giải các phương trình:

a) $\left|\frac{x^2-2}{x+1}\right| = 2$ b) $|2x + 3| = |4 - 3x|$

Giải

a) ĐK: $x \neq -1$, phương trình tương đương $|x^2 - 2| = 2|x + 1|$

$\Leftrightarrow x^2 - 2 = 2(x + 1)$ hoặc $x^2 - 2 = -2(x + 1)$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 0$ hoặc $x^2 + 2x = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{5}$ hoặc $x = 0$ hoặc $x = -2$ (thoả)

Vậy phương trình có bốn nghiệm: $x = 1 \pm \sqrt{5}$, $x = 0$ và $x = -2$.

b) PT $\Leftrightarrow (2x + 3)^2 = (4 - 3x)^2 \Leftrightarrow 5x^2 - 36x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$ hoặc $x = 7$.

Ví dụ 3: Giải các phương trình:

a) $|x^2 - 1| = 1 - |x|$ b) $\frac{|2x+7|}{x-1} = |3x-1|$

Giải

a) Ngoài cách chia miền để xét dấu, ta có thể nhận xét

VT $\geq 0 \Rightarrow$ VP $= 1 - |x| \geq 0 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq 1$ nên:

PT $\Leftrightarrow 1 - x^2 = 1 - |x| \Leftrightarrow x^2 - |x| = 0 \Leftrightarrow |x|(|x| - 1) = 0$

$\Leftrightarrow |x| = 0$ hoặc $|x| = 1 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm 1$ (chọn)

b) ĐK: $x \neq 1$, hơn nữa $x - 1 > 0$ nên $x > 1$

PT $\Leftrightarrow |2x + 7| = (x - 1)|3x - 1| \Leftrightarrow 2x + 7 = (x - 1)(3x - 1)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$

Chọn nghiệm $x = 1 + \sqrt{3}$.

Ví dụ 4: Giải các phương trình:

a) $|x^2 - 4x + 3| + |x^2 - 3x - 4| = 7 - x$

b) $|x^2 - 4| - |x^2 - 5x + 4| = |5x - 8|$

Giải

a) Ngoài cách xét dấu $x^2 - 4x + 3$ và $x^2 - 3x - 4$ thì phải xét 5 trường hợp, ta có giải cách khác:

Đặt $A = x^2 - 4x + 3$; $B = -x^2 + 3x + 4$ thì phương trình:

$|A| + |B| = A + B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ -x^2 + 3x + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \text{ hay } x \geq 3 \\ -1 \leq x \leq 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$ hoặc $3 \leq x \leq 4$.

b) Đặt $A = x^2 - 4$; $B = x^2 - 5x + 4$ thì phương trình:

$$|A| - |B| = A - B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A \geq B \geq 0 \\ A \leq B \leq 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x^2 - 4x \geq x^2 - 5x + 4 \geq 0 \\ x^2 - 4x \leq x^2 - 5x + 4 \leq 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5x \geq 8, x^2 - 5x + 4 \geq 0 \\ 5x \leq 8, x^2 - 5x + 4 \leq 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \geq \frac{8}{5}, x \leq 1 \text{ hay } x \geq 4 \\ x \leq \frac{8}{5}, 1 \leq x \leq 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \geq 4 \\ 1 \leq x \leq \frac{8}{5} \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 5: Giải các phương trình:

a) $|||x - 1| + 1| - 3| = 2$ b) $(x^2 + 3x)^2 - 5|x^2 + 3x - 1| - 1 = 0$

Giải

a) Phương trình tương đương:

$$\begin{bmatrix} ||x-1|+1|-3 = 2 \\ ||x-1|+1|-3 = -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} ||x-1|+1| = 5 \\ ||x-1|+1| = 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} |x-1| = 4 \\ |x-1| = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x - 1 = \pm 4 \\ x - 1 = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = -3 \text{ hoặc } x = 1 \text{ hoặc } x = 5$$

b) Đặt $t = x^2 + 3x$ thì PT: $t^2 - 5|t - 1| - 1 = 0$

Xét $t \geq 1$ thì PT $\Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 4$

Do đó $x^2 + 3x - 1 = 0$ hoặc $x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$ hoặc $x = 1$ hoặc $x = -4$

Xét $t < 1$ thì PT $\Leftrightarrow t^2 + 5t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = -6$

Chọn $t = -6$ nên có $x^2 + 3x + 6 = 0$ ($\Delta < 0$)

Vậy phương trình có 4 nghiệm $x = 1$, $x = -4$, $x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Ví dụ 6: Giải các bất phương trình:

a) $|-x^2 + x - 1| \leq 2x + 5$ b) $|x^2 - x| \leq |x^2 - 1|$

Giải

a) TTB2: $-x^2 + x - 1$ có $\Delta = 1 - 4 < 0$ nên $-x^2 + x - 1 < 0$

BPT $\Leftrightarrow x^2 - x + 1 \leq 2x + 5 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[-1 ; 4]$.

b) BPT $\Leftrightarrow (x^2 - x)^2 \leq (x^2 - 1)^2 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 1)^2 \leq (x - 1)^2(x - 1)^2$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 (2x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \\ 2x + 1 \geq 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Ví dụ 7 Giải các bất phương trình:

a) $\left|\frac{3x+4}{x-2}\right| \le 3$ b) $\left|\frac{2x-3}{x-3}\right| \ge 1$

Giải

a) ĐK: $x \ne 2$. BPT $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x+4}{x-2} \ge -3 \\ \frac{3x+4}{x-2} \le 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x+4}{x-2}+3 \ge 0 \\ \frac{3x+4}{x-2}-3 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6x-2}{x-2} \ge 0 \\ \frac{10}{x-2} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \frac{1}{3} \text{ hay } x > 2 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \le \frac{1}{3}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$

b) ĐK: $x \ne 3$. BPT $\Leftrightarrow \frac{2x-3}{x-3} \le -1$ hoặc $\frac{2x-3}{x-3} \ge 1$

Ta có: $\frac{2x-3}{x-3} \le -1 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x-3}+1 \le 0 \Leftrightarrow \frac{3x-6}{x-3} \le 0 \Leftrightarrow 2 \le x < 3$

$\frac{2x-3}{x-3} \ge 1 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x-3}-1 \ge 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x-3} \ge 0 \Leftrightarrow x \le 0$ hoặc $x > 3$

Vậy tập nghiệm là: $(-\infty ; 0] \cup [2 ; 3) \cup (3 ; +\infty)$.

Ví dụ 8 Giải các bất phương trình:

a) $4x^2 + 4x - |2x + 1| \ge 5$ b) $|x^2 - 5x + 4| \le x^2 + 6x + 5$

Giải

a) Đặt $t = |2x + 1|$, $t \ge 0$ thì $t^2 = 4x^2 + 4x + 1$ nên:

BPT $\Leftrightarrow t^2 - 1 - t \ge 5 \Leftrightarrow t^2 - t - 6 \ge 0 \Leftrightarrow t \le -2$ hoặc $t \ge 3$

Chọn $t \ge 3 \Leftrightarrow |2x + 1| \ge 3 \Leftrightarrow 2x + 1 \le -3$ hoặc $2x + 1 \ge 3$

$\Leftrightarrow x \le -2$ hoặc $x \ge 1$. Vậy $S = (-\infty ; -2] \cup [1 ; +\infty)$

b) Nếu $x^2 - 5x + 4 > 0 \Leftrightarrow x < 1$ hoặc $x > 4$:

BPT $\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 \le x^2 + 6x + 5 \Leftrightarrow 11x \ge -1 \Leftrightarrow x \ge -\frac{1}{11}$.

Chọn nghiệm $-\frac{1}{11} < x < 1$ hoặc $x > 1$.

Nếu $x^2 - 5x + 4 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le x \le 4$:

BPT $\Leftrightarrow -x^2 + 5x - 4 \le x^2 + 6x + 5 \Leftrightarrow 2x^2 + x + 9 \ge 0$: đúng

vì $\Delta = 1 - 72 < 0$, $a = 2 > 0$, nên nghiệm $1 \le x \le 4$.

Vậy tập nghiệm $S = \left[-\frac{1}{11}; +\infty\right)$.

Ví dụ 9: Giải các bất phương trình:

a) $x + 5 > |x^2 + 4x - 12|$ b) $|x^3 - 8| \geq 2 - x$

Giải

a) $\begin{cases} x+5>0 \\ (x+5)^2 > (x^2+4x-12)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-5 \\ (x+5)^2-(x^2+4x-12)^2>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-5 \\ (x^2+4x-12+x+5)(x^2+4x-12-x-5)<0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-5 \\ (x^2+5x-7)(x^2+3x-17)<0 \end{cases}$

Lập bảng xét dấu thì có tập nghiệm:

$$S = \left(\frac{-5-\sqrt{53}}{2};\frac{-3-\sqrt{77}}{2}\right) \cup \left(\frac{-5+\sqrt{53}}{2};\frac{-3+\sqrt{77}}{2}\right)$$

b) BPT $\Leftrightarrow |(x-2)(x^2+2x+4)| \geq 2-x$

$\Leftrightarrow |(x-2)|(x^2+2x+4) \geq 2-x$ do $x^2+2x+4>0, \forall x$

Nếu $x \geq 2$ thì VT $\geq 0 \geq$ VP: đúng

Nếu $x < 2$ thì $(2-x)(x^2+2x+4) \geq 2-x$

$\Leftrightarrow x^2+2x+4 \geq 1 \Leftrightarrow x^2+2x+3 \geq 0$: đúng, $\forall x$

Vậy tập nghiệm là **R**.

Ví dụ 10: Tìm tập xác định của hàm số:

a) $y = \sqrt{|x^2+3x-4|-x+8}$ b) $y = \sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{|2x-1|-x-2}}$

Giải

a) Điều kiện xác định: $|x^2+3x-4| - x + 8 \geq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-4 \geq 0 \\ x^2+3x-4-x+8 \geq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x^2+3x-4<0 \\ -x^2-3x+4-x+8 \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-4 \geq 0 \\ x^2+2x+4 \geq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x^2+3x-4<0 \\ -x^2-4x+12 \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -4 \text{ hay } x \geq 1 \\ x \in R \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} -4<x<1 \\ x^2+4x-12 \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \leq -4$ hoặc $x \geq 1$ hoặc $\begin{cases} -4<x<1 \\ -6 \leq x \leq 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \leq -4$ hoặc $x \geq 1$ hoặc $-4 < x < 1$

$\Leftrightarrow x \in R$. Vậy tập xác định là D = **R**.

b) Điều kiện xác định: $\frac{x^2+x+1}{|2x-1|-x-2} \geq 0$.

Vì $x^2 + x + 1 > 0$ với mọi x nên bất phương trình tương đương

$$|2x-1|-x-2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x \geq 1, 2x-1-x-2>0 \\ 2x<1, 1-2x-x-2>0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x \geq 1, x>3 \\ 2x<1, 3x<-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq \frac{1}{2}, x>3 \\ x<\frac{1}{2}, x<-\frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<-\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

Vậy tập xác định của hàm số là: $D = \left(-\infty;-\frac{1}{3}\right) \cup (3;+\infty)$.

Ví dụ 11: Giải và biện luận các phương trình:

a) $|2x - 5m| = 2x - 3m$ b) $|3x + 4m| = |4x - 7m|$

Giải

a) Nếu $x \geq \frac{5m}{2}$ phương trình trở thành: $2x - 5m = 2x - 3m \Leftrightarrow 0.x = m$

Khi $m \neq 0$ thì phương trình vô nghiệm

Khi $m = 0$ thì mọi $x \geq 0$ đều là nghiệm của phương trình

Nếu $x < \frac{5m}{2}$ phương trình trở thành

$$-2x + 5m = 2x - 3m \Leftrightarrow 4x = 8m \Leftrightarrow x = 2m$$

Điều kiện $x < \frac{5m}{2} \Leftrightarrow 2m < \frac{5m}{2} \Leftrightarrow m > 0$, nên:

Khi $m > 0$ thì phương trình có nghiệm $x = 2m$

Khi $m \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm

Vậy: Với $m > 0$ phương trình có nghiệm $x = 2m$

Với $m = 0$ phương trình có nghiệm là mọi $x \geq 0$

Với $m < 0$ phương trình vô nghiệm

b) $PT \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+4m=4x-7m \\ 3x+4m=-4x+7m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=11m \\ x=\frac{3m}{7} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x = 11m$ và $x = \frac{3m}{7}$ với mọi m.

Ví dụ 12: Giải và biện luận phương trình:

a) $|x - 1| = mx - 1$ b) $|mx + 1| = |3x + m - 2|$

Giải

a) Nếu $x \geq 1$: $PT \Leftrightarrow x - 1 = mx - 1 \Leftrightarrow (m - 1)x = 0$ (1)

Với $m \neq 1$: (1) vô nghiệm.

Với m = 1: mọi $x \geq 1$ đều là nghiệm của (1)

Nếu $x < 1$: PT $\Leftrightarrow -x + 1 = mx - 1 \Leftrightarrow (m + 1)x = 2$ (2)

Với m = –1: (2) vô nghiệm

Với $m \neq -1$: nghiệm của (2) là $x = \dfrac{2}{m+1}$

Điều kiện $x < 1 \Leftrightarrow \dfrac{2}{m+1} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1-m}{m+1} < 0 \Leftrightarrow m < -1$ hoặc $m > 1$

Vậy: Khi $m < -1$ hoặc $m > 1$: PT có nghiệm $x = \dfrac{2}{m+1}$

Khi $-1 \leq m < 1$: vô nghiệm

Khi m = 1: mọi $x \geq 1$ đều là nghiệm.

b) Ta có 2 trường hợp:

• $mx + 1 = 3x + m - 2 \Leftrightarrow (m - 3)x = m - 3$ (1)

Với $m \neq 3$: Nghiệm phương trình (1) là x = 1

Với m = 3: Mọi x là nghiệm của phương trình (1)

• $mx + 1 = -3x - m + 2 \Leftrightarrow (m + 3)x = 1 - m$ (2)

Với $m \neq -3$: Nghiệm phương trình (2) là $x = \dfrac{1-m}{m+3}$

Với m = –3: Phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy: Khi $m \neq 3$ và $m \neq -3$: phương trình có hai nghiệm: x = 1 và $x = \dfrac{1-m}{m+3}$.

Khi m = –3: Phương trình có một nghiệm x = 1

Khi m = 3: Mọi $x \in \mathbf{R}$ đều là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 13: Giải và biện luận phương trình:

a) $x + \dfrac{2a|x+a|}{x} = \dfrac{a^2}{x}$ b) $|x - 1| + 2|x^2 - 3| + |x - 5| = 4 - m^2$

Giải

a) Điều kiện $x \neq 0$, PT $\Leftrightarrow x^2 + 2a|x + a| - a^2 = 0$

Nếu $x \geq -a$ thì phương trình trở thành:

$x^2 + 2ax + a^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = -a$ (chọn)

Nếu $x < -a$ thì phương trình trở thành:

$x^2 - 2ax - 3a^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -a$ (loại) và $x_2 = 3a$

Xét $x_2 < -a \Leftrightarrow 3a < -a \Leftrightarrow a < 0$

Vậy: Khi $a < 0$: $S = \{-a ; 3a\}$

Khi a = 0: $S = \varnothing$. Khi $a > 0$: $S = \{-a\}$.

b) Ta có: $|x - 1| + |x - 5| = |x - 1| + |5 - x| \geq |(x - 1)(5 - x)| = 4$

Nên $|x - 1| + 2|x^2 - 3| + |x - 5| \geq 4, \forall x$

Mà $4 - m^2 \leq 4, \forall m$, do đó VT $\geq 4 \geq$ VP

Nếu $m \neq 0$ thì VT $\geq 4 >$ VP: vô nghiệm

Nếu m = 0 thì VT = 4 nên dấu bằng đồng thời xảy ra:

$$\begin{cases}(x-1)(5-x)\geq 0\\ x^2-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\leq x\leq 5\\ x=\pm\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt{3}$$

Vậy: Khi $m\neq 0$: $S=\varnothing$. Khi $m=0$: $S=\{\sqrt{3}\}$.

Ví dụ 14: Giải và biện luận các bất phương trình:

a) $m|x+5|<|x+1|$ b) $|x-a|+|x+a|<b$

Giải

a) Nếu $m=0$ thì BPT: $0<|x+1|\Leftrightarrow x\neq -1$: $S=\mathbf{R}\setminus\{-1\}$

Nếu $m<0$ thì BPT luôn có nghiệm đúng với mọi x: $S=\mathbf{R}$

Nếu $m>0$ thì BPT $\Leftrightarrow m^2(x+5)^2<(x+1)^2$

$\Leftrightarrow (m^2-1)x^2+2(5m^2-1)x+25m^2-1<0$

Khi $m=1$ thì BPT: $8x+24<0\Leftrightarrow x<-3$: $S=(-\infty;-3)$

Khi $m\neq 1$ thì TTB2 có 2 nghiệm $x=\dfrac{5m-1}{m-1}$, $x=\dfrac{5m+1}{m+1}$

Với $0<m<1$ thì $S=\left(-\infty;\dfrac{5m-1}{m-1}\right)\cup\left(\dfrac{5m+1}{m+1};+\infty\right)$

Với $m>1$ thì $S=\left(\dfrac{5m+1}{m+1};\dfrac{5m-1}{m-1}\right)$

b) Với $b\leq 0$ thì $S=\varnothing$. Với $b>0$ ta xét a:

Khi $a=0$, BPT $\Leftrightarrow 2|x|<b\Leftrightarrow -\dfrac{b}{2}<x<\dfrac{b}{2}$

Khi $a>0$, ta xét 3 trường hợp:

– Nếu $x<-a$: BPT $\Leftrightarrow -2x<b\Leftrightarrow x>-\dfrac{b}{2}$

Do đó, nếu $b>2a$ thì $S=(-\dfrac{b}{2};-a)$, nếu $b\leq 2a$ thì $S=\varnothing$

– Nếu $-a\leq x<a$: BPT $\Leftrightarrow 0x<b-2a$.

Do đó, nếu $b>2a$ thì $S=[-a;a)$, nếu $b\leq 2a$ thì $S=\varnothing$

– Nếu $x\geq a$: BPT $\Leftrightarrow 2x<b\Leftrightarrow x<\dfrac{b}{2}$.

Do đó, nếu $b>2a$ thì $S=\left(a;\dfrac{b}{2}\right)$, nếu $b\leq 2a$ thì $S=\varnothing$

Khi $a<0$, ta cũng xét 3 trường hợp:

– Nếu $x<a$: BPT $\Leftrightarrow -2x<b\Leftrightarrow x>-\dfrac{b}{2}$

Do đó, nếu $b>-2a$ thì $S=(-\dfrac{b}{2};-a)$, nếu $b\leq 2-a$ thì $S=\varnothing$

– Nếu $a\leq x<-a$: BPT $\Leftrightarrow 0x<b+2a$.

Do đó, nếu $b > -2a$ thì $S = [a ; -a)$, nếu $b \le 2a$ thì $S = \varnothing$.

– Nếu $x \ge -a$: BPT $\Leftrightarrow 2x < b \Leftrightarrow x < \dfrac{b}{2}$

Do đó, nếu $b > -2a$ thì $S = \left[-a;\dfrac{b}{2}\right)$, nếu $b \le -2a$ thì $S = \varnothing$.

Vậy: Nếu $b \le 2|a|$ thì $S = \varnothing$. Nếu $b > 2|a|$ thì $S = \left(-\dfrac{b}{2};\dfrac{b}{2}\right)$.

Ví dụ 15: Tìm m để phương trình:

a) $\dfrac{mx^2}{|x|-1} - m|x| = 2m+1$ có nghiệm

b) $|2x^2 + x - 3| = 5a - 2 - 12x - 2x^2$ có nghiệm duy nhất

Giải

a) Với điều kiện $|x| \ne 1$ phương trình tương đương:

$mx^2 - m|x|^2 + m|x| = (2m + 1)|x| - (2m + 1)$

$\Leftrightarrow (m + 1)|x| = 2m + 1$ (1)

Để ý khi $|x| = 1$ thì $m = 0$, do đó phương trình có nghiệm:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2m+1}{m+1} \ge 0 \\ m \ne 0, m \ne -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+1)(m+1) \ge 0 \\ m \ne 0, m \ne -1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1 \text{ hoặc } m > -\frac{1}{2},\ m \ne 0$$

b) PT $\Leftrightarrow |2x^2 + x - 3| + 2x^2 + 12x + 2 = 5a$

Đặt $y = |2x^2 + x - 3| + 2x^2 + 12x + 2$

Ta có $y = \begin{cases} 4x^2 + 13x - 1 \text{ khi } x \in \left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right) \cup (1;-\infty) \\ 11x + 5 \text{ khi } x \in \left[-\dfrac{3}{2};1\right] \end{cases}$

Đồ thị của hàm số gồm một đoạn thẳng ở giữa và 2 nhánh của parabol $y = 4x^2 + 13x - 1$ có đỉnh $S\left(-\dfrac{13}{8};-\dfrac{185}{16}\right)$

Vì $-\dfrac{13}{8} < -\dfrac{3}{2}$ nên phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$5a = -\frac{185}{16} \Leftrightarrow a = -\frac{37}{16}.$$

Ví dụ 16: Tìm m để bất phương trình:

a) $x^2 + |x + m| < 2$ có nghiệm

b) $x^2 - 2mx + 2|x - m| + 2 > 0$ có nghiệm với mọi x.

Giải

a) $|x + m| < 2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2 < x + m < 2 - x^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - m - 2 < 0 \\ x^2 + x + m - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > x^2 - x - 2 \\ m < -x^2 + x + 2 \end{cases} \quad (*)$$

ABC

Đặt $f(x) = x^2 - x - 2$ thì $f(x)$ đạt GTNN tại đỉnh $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{4}$ và $g(x) = -x^2 + x + 2$

thì $g(x)$ đạt GTLN tại đỉnh $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$

Hệ (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m > \min f(x) \\ m < \max g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{9}{4} \\ m < \frac{9}{4} \end{cases}$

Vậy bất phương trình có nghiệm khi $-\frac{9}{4} < m < \frac{9}{4}$.

b) Đặt $t = |x - m| \geq 0$ ta đưa về bài toán tìm m để: $t^2 + 2t + 2 - m^2 > 0$ thoả với mọi $t \geq 0$

Phần thuận: Cho $t = 0$ thì $2 - m^2 > 0 \Leftrightarrow m^2 < 2 \Leftrightarrow |m| < \sqrt{2}$

Đảo lại, khi $|m| < \sqrt{2} \Rightarrow 2 - m^2 > 0$

mà $t \geq 0 \Rightarrow t^2 + 2t \geq 0$ nên $t^2 + 2t + 2 - m^2 > 0, \forall t \geq 0$

Vậy giá trị cần tìm: $|m| < \sqrt{2}$.

Ví dụ 17: Biện luận số nghiệm của phương trình:

a) $(x - 1)|x - 5| = m$ b) $|x^4 - 4x^2 + 3| = m$ (1)

Giải

a) Xét hàm $y = (x - 1)|x - 5| = \begin{cases} x^2 - 6x + 5 & \text{khi } x \geq 5 \\ -x^2 + 6x - 5 & \text{khi } x < 5 \end{cases}$

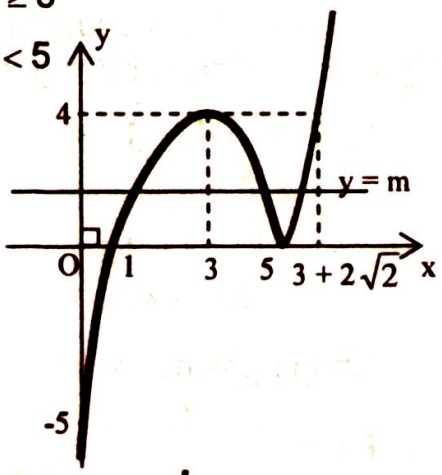
Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị với đường thẳng $y = m$

Dựa vào đồ thị ta có:

Nếu $m < 0$ hoặc $m > 4$: 1 nghiệm

Nếu $m = 0$ hoặc $m = 4$: 2 nghiệm

Nếu $0 < m < 4$: 3 nghiệm



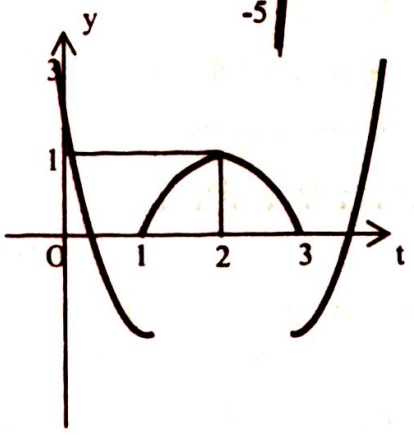
b) Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$ thì phương trình $|t^2 - 4t + 3| = m$ (2)

Dựa vào đồ thị $f(t) = |t^2 - 4t + 3|$, $t \geq 0$ và tương giao với đường thẳng $y = m$, ta có:

Nếu $m < 0$ thì (2) vô nghiệm nên (1) vô nghiệm.

Nếu $m = 0$ hoặc $1 < m < 3$ thì (2) có 2 nghiệm t dương nên (1) có 4 nghiệm.

Nếu $m = 1$ thì (2) có 3 nghiệm t dương nên (1) có 6 nghiệm.



Nếu $1 < m < 3$ thì (2) có 4 nghiệm t dương nên (1) có 8 nghiệm.

Nếu $m = 3$ thì (2) có 1 nghiệm $t = 0$ và 1 nghiệm dương nên (1) có 3 nghiệm.

Nếu $m > 3$ thì (2) có 1 nghiệm t dương nên (1) có 2 nghiệm.

DẠNG 2: PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

Phá căn thức bằng cách:

– Đặt điều kiện và bình phương.

– Đặt ẩn phụ.

– Nhân lượng liên hiệp,...

* Dạng cơ bản:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases} ; \sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases}$$

Chú ý:

– Biến đổi về phương trình tích số.

– Công thức $\sqrt{A^2} = |A|, \sqrt{AB} = \sqrt{A}.\sqrt{B}$ khi $A, B \geq 0$

– Dùng tính chất đồng biến, nghịch biến của hàm số.

– Đặt ẩn phụ rồi chuyển phương trình thành hệ phương trình cơ bản.

Ví dụ 1: Giải các phương trình:

a) $\sqrt{2x^2 + 4x - 1} = x + 1$ b) $\sqrt{4x^2 + 101x + 64} = 2(x + 10)$

Giải

a) $PT \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 2x^2 + 4x - 1 = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + 2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x = -1 \pm \sqrt{3} \end{cases}$

Chọn nghiệm $x = -1 + \sqrt{3}$

b) $PT \Leftrightarrow \begin{cases} x + 10 \geq 0 \\ 4x^2 + 101x + 64 = 4(x+10)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -10 \\ 21x = 336 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -10 \\ x = 16 \end{cases} \Leftrightarrow x = 16.$

Ví dụ 2: Giải các phương trình:

a) $\sqrt{x^2 + 2x} = -2x^2 - 4x + 3$ b) $\sqrt{(x+1)(x+2)} = x^2 + 3x - 4$

Giải

a) Đặt $y = \sqrt{x^2 + 2}$, $y \geq 0$ thì PT: $y = -2y^2 + 3$

$\Leftrightarrow 2y^2 + y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ hoặc $y = -3$

Chọn $y = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 1$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$.

b) Đặt: $t = \sqrt{(x+1)(x+2)}$, $t \geq 0$ thì $t^2 = x^2 + 3x + 2$

PT $\Leftrightarrow t = t^2 - 6 \Leftrightarrow t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = -2$ hoặc $t = 3$

Chọn $t = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(x+2)} = 3 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 1 = 0$

Giải ra được nghiệm $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{37}}{2}$.

Ví dụ 3: Giải các phương trình:

a) $\sqrt{2x^2 + 3x - 4} = \sqrt{7x + 2}$ b) $\sqrt{3x^2 + 5x + 8} - \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = 1$

Giải

a) PT $\Rightarrow \begin{cases} 7x + 2 \geq 0 \\ 2x^2 + 3x - 4 = 7x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 2 \geq 0 \\ 2x^2 - 4x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{2}{7} \\ x = -1 \text{ hay } x = 3 \end{cases}$

Chọn nghiệm $x = 3$.

b) Đặt $t = \sqrt{3x^2 + 5x + 8}$, $t \geq 0$ thì $t^2 = 3x^2 + 5x + 8$

PT: $t - \sqrt{t^2 - 7} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{t^2 - 7} = t - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t - 1 \geq 0 \\ t^2 - 7 = (t-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 1 \\ 2t = 8 \end{cases} \Leftrightarrow t = 4$.

Do đó $\sqrt{3x^2 + 5x + 8} = 4 \Leftrightarrow 3x^2 + 5x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -\dfrac{8}{3}$

Ví dụ 4: Giải các phương trình:

a) $\sqrt{3x + 4} - \sqrt{2x + 1} = \sqrt{x + 3}$ b) $\sqrt{x - 1} + 2\sqrt{x^2 - 9} = 10$

Giải

a) ĐK: $3x + 4 \geq 0$, $2x + 1 \geq 0$, $x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{1}{2}$

PT $\Leftrightarrow \sqrt{3x + 4} = \sqrt{2x + 1} + \sqrt{x + 3}$

$\Leftrightarrow 3x + 4 = 3x + 4 + 2\sqrt{(2x+1)(x+3)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(2x+1)(x+3)} = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2}$ hoặc $x = -3$. Chọn nghiệm $x = -\dfrac{1}{2}$

b) ĐK: $x - 1 \geq 0$, $x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$

Ta có hàm số $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x^2 - 9}$ đồng biến khi $x \geq 3$

nên phương trình $f(x) = 10$ có tối đa 1 nghiệm

Xét $x = 5 \Rightarrow f(5) = \sqrt{4} + 2\sqrt{16} = 10$: đúng

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 5$.

Ví dụ 5: Giải các phương trình:

a) $(4x - 1)\sqrt{x^2 + 1} = 2x^2 + 2x + 1$

b) $\sqrt{1 + x} - \sqrt{8 - x} + \sqrt{(1+x)(8-x)} = 3$.

Giải

a) Đặt $y = \sqrt{x^2 + 1}$ $(y \geq 1) \Rightarrow x^2 = y^2 - 1$

PT $\Leftrightarrow (4x - 1)y = 2(y^2 - 1) + 2x + 1 \Leftrightarrow 2y^2 - (4x - 1)y + (2x - 1) = 0$

$\Delta = (4x - 1)^2 - 8(2x - 1) = 16x^2 - 24x + 9 = (4x - 3)^2$

Phương trình có 2 nghiệm $y = \frac{1}{2}$ (loại), $y = 2x - 1$.

Do đó $\sqrt{x^2+1} = 2x - 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x^2+1=(2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 3x^2-4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x = \frac{4}{3} \text{ hay } x = 0 \end{cases}$$

Chọn nghiệm $x = \frac{4}{3}$

b) Điều kiện $-1 \leq x \leq 8$

Ngoài cách đặt $\begin{cases} \sqrt{1+x} = u \ (u \geq 0) \\ \sqrt{8-x} = v \ (v \geq 0) \end{cases} \Rightarrow u^2 + v^2 = 9$

phương trình trở thành hệ phương trình: $\begin{cases} u+v+uv=3 \\ u^2+v^2=9 \end{cases}$

ta đặt $t = \sqrt{1+x} + \sqrt{8-x}$, $t \geq 0 \Rightarrow t^2 = 9 + 2\sqrt{(1+x)(8-x)}$

PT: $t + \frac{t^2-9}{2} = 3 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 15 = 0 \Leftrightarrow t = -5$ hoặc $t = 3$

Chọn nghiệm $t = 3 \Leftrightarrow \sqrt{1+x} + \sqrt{8-x} = 3$.

$\Leftrightarrow 1 + x + 8 - x + 2\sqrt{(1+x)(8-x)} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{(1+x)(8-x)} = 0$

Chọn 2 nghiệm $x = -1$, $x = 8$.

Ví dụ 6: Giải các phương trình:

a) $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$ b) $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{2x-3}$

Giải

a) Đặt $\begin{cases} u = \sqrt[3]{x+34} \\ v = \sqrt[3]{x-3} \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 37$. Phương trình trở thành hệ:

$$\begin{cases} u^3-v^3=37 \\ u-v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=v+1 \\ v^2+v-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=-3 \\ v=-4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u=4 \\ v=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x+34} = -3 \\ \sqrt[3]{x-3} = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -61 \\ x = 30 \end{cases}$$

b) PT $\Leftrightarrow x - 1 + x - 2 + 3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}\,(\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2}) = 2x - 3$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x-1)(x-2)}\,(\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2}) = 0$

$\Leftrightarrow x - 1 = 0$ hoặc $x - 2 = 0$ hoặc $x - 1 = 2 - x$

$\Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 2$ hoặc $x = \frac{3}{2}$.

Ví dụ 7: Giải các phương trình:

a) $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$ b) $3\sqrt[3]{6-x} - 2\sqrt{6+x} = 2$

Giải

a) Đặt $t = \sqrt[3]{2x-1} \Leftrightarrow t^3 = 2x - 1$. Ta có hệ: $\begin{cases} x^3 + 1 = 2t \\ t^3 + 1 = 2x \end{cases}$

Trừ vế theo vế: $x^2 - t^3 = 2(t - x) \Leftrightarrow (x - t)(x^2 + t^2 + xt + 2) = 0$ (2)

Vì $x^2 + t^2 + xt + 2 = \left(x + \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{3t^2}{4} + 2 > 0$

Nên (2) $\Leftrightarrow x - t = 0 \Leftrightarrow x = t \Leftrightarrow x^3 = 2x - 1$

$\Leftrightarrow x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (chọn)

b) Điều kiện: $x \geq -6$. Đặt $u = \sqrt[3]{6 - x}$; $v = \sqrt{6 + x}$

Ta có hệ: $\begin{cases} 3u - 2v = 2 & (1) \\ u^3 + v^2 = 12 & (2) \end{cases}$

Từ (1) suy ra: $v = \frac{3u - 2}{9}$. Thế vào (2) ta được phương trình:

$4u^3 + 9u^2 - 12u - 44 = 0 \Leftrightarrow (u - 2)(4u^2 + 17u + 22) = 0$

$\Leftrightarrow u = 2$ (vì $4u^2 + 17u + 22 > 0, \forall u$)

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{6 - x} = 2 \Leftrightarrow 6 - x = 8 \Leftrightarrow x = -2$ (chọn)

Cách khác: Vế trái là hàm f(x) nghịch biến, f(–2) = 2 nên x = –2 là nghiệm duy nhất.

Ví dụ 8: Giải các phương trình:

a) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-1} = \sqrt{x^2-5x+4}$ b) $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$.

Giải

a) ĐK: $x - 1 \geq 0, x^2 - 1 \geq 0, x^2 - 5x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x \geq 4$

Khi x = 1 thì PT: 0 = 0 đúng

Khi $x \geq 4$ thì PT: $\sqrt{x-1}(1 + \sqrt{x+1}) = \sqrt{x-1}\sqrt{x-4}$

$1 + \sqrt{x+1} = \sqrt{x-4} \Leftrightarrow 2 + x + 2\sqrt{x+1} = x - 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} = -6$: vô nghiệm.

Vậy PT có nghiệm duy nhất x = 1.

b) ĐK: $2 \leq x \leq 4$. Ta có $VP = x^2 - 6x + 11 = (x - 3)^2 + 2 \geq 2$

$VT \geq 0, VT^2 = 2 + 2\sqrt{(x-2)(4-x)} \leq 2 + (x - 2) + (4 - x) = 4$

$\Rightarrow VT \leq 2$, nên dấu bằng đồng thời xảy ra: $\begin{cases} x - 3 = 0 \\ x - 2 = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x = 3.

Ví dụ 9: Giải các bất phương trình:

a) $\sqrt{x^2 + x - 6} < x - 1$ b) $\sqrt{2x-1} \leq 2x - 3$

Giải

a) ĐK: $x^2 + x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$ hoặc $x \geq 2$.

Khi $x \leq -3$ thì $x - 1 < 0$ nên phương trình vô nghiệm

Khi $x \geq 2$ thì $x - 1 > 0$ nên phương trình tương đương:

$x^2 + x - 6 < x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow 3x < 7 \Leftrightarrow x < \frac{7}{3}$.

Kết hợp thì chọn nghiệm $2 \leq x < \frac{7}{3}$.

b) $BPT \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0, 2x-3 \geq 0 \\ 2x-1 \leq (2x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 1, 2x \geq 3 \\ 4x^2 - 14x + 10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \leq 1 \text{ hay } x \geq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}$.

Ví dụ 10: Giải các bất phương trình:

a) $\sqrt{2x^2 - 1} > 1 - x$ b) $\sqrt{x^2 - 5x - 14} \geq 2x - 1$

Giải

a) ĐK: $2x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ hoặc $x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Xét $1 - x < 0 \Leftrightarrow x > 1$ thì BPT nghiệm đúng

Xét $1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$ thì BPT tương đương:

$x^2 - 1 > (1 - x)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 > 0 \Leftrightarrow x < -1 - \sqrt{3}$ hoặc $x > -1 + \sqrt{3}$

Vậy tập nghiệm là $(-\infty ; -1 - \sqrt{3}) \cup (-1 + \sqrt{3} ; +\infty)$.

b) Điều kiện: $x^2 - 5x - 14 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$ hoặc $x \geq 7$

Khi $x \leq -2$ thì $2x - 1 < 0$ nên BPT nghiệm đúng

Khi $x \geq 7$ thì $2x - 1 > 0$ nên BPT tương đương

$x^2 - 5x - 14 \geq (2x - 1)^2 \Leftrightarrow 3x^2 + x + 15 \leq 0$: vô nghiệm

Vậy tập nghiệm là $(-\infty ; -2]$.

Ví dụ 11: Giải các bất phương trình:

a) $\frac{2x-4}{\sqrt{x^2 - 3x - 10}} > 1$ b) $6\sqrt{(x-3)(x-2)} \leq x^2 - 34x + 48$

Giải

a) $BPT \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 10 > 0 \\ \sqrt{x^2 - 3x - 10} < 2x - 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 10 > 0 \\ 2x - 4 > 0 \\ x^2 - 3x - 10 < (2x-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \text{ hay } x > 5 \\ x > 2 \\ 3x^2 - 13x + 26 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 5$

b) ĐK: $(x - 2)(x - 3) \geq 0$. Đặt $t = \sqrt{(x-2)(x-3)}$

thì $t \geq 0$ và $t^2 = (x - 2)(x - 3) = x^2 - 34x + 64$

BPT $\Leftrightarrow 6t \leq t^2 - 16 \Leftrightarrow t^2 - 6t - 16 \geq 0 \Leftrightarrow t \leq -2$ hoặc $t \geq 8$

Chọn $t \geq 8$ nên có $x^2 - 34x + 64 \geq 64$

$\Leftrightarrow x^2 - 34x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ hoặc $x \geq 34$ (chọn).

Ví dụ 12: Giải các bất phương trình:

a) $(x-2)\sqrt{x^2+4} \le x^2-4$ b) $\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x^2+2x-3} \le \sqrt{x^2+4x-5}$

Giải

a) BPT $\Leftrightarrow (x-2)\sqrt{x^2+4} \le (x-2)(x+2)$

- Xét $x = 2$ thì BPT: $0 \le 0$ đúng.

- Xét $x > 2$ thì BPT $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+4} \le x+2 \Leftrightarrow x^2+4 \le x^2+4x+4$

$\Leftrightarrow 4x \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 0$. Chọn $x > 2$.

- Xét $x < 2$ thì BPT $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+4} \ge x+2$

Khi $x \le -2$ thì $x + 2 < 0$: BPT nghiệm đúng.

Khi $-2 < x < 2$ thì BPT $\Leftrightarrow x^2+4 \ge (x+2)^2$

$\Leftrightarrow 4x < 0 \Leftrightarrow x < 0$. Chọn $-2 < x \le 0$.

Vậy tập nghiệm là $(-\infty ; 0] \cup [2 ; +\infty)$.

b) Điều kiện: $x \le -5$ hoặc $x \ge 1$

BPT $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(x+2)}+\sqrt{(x-1)(-x-3)} \le \sqrt{(x-1)(x+5)}$

Xét các trường hợp sau:

Nếu $x > 1$: BPT $\Leftrightarrow \sqrt{x+2}+\sqrt{x+3} \le \sqrt{x+5}$

$\Leftrightarrow 2x + 5 + 2\sqrt{(x+2)(x+3)} \le x + 5$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+2)(x+3)} \le -x < 0$: vô nghiệm

Nếu $x = 1$: BPT được nghiệm đúng

Nếu $x \le -5$: BPT $\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(-x-2)}+\sqrt{(1-x)(-x-3)} \le \sqrt{(1-x)(-x-5)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{-x-2}+\sqrt{-x-3} \le \sqrt{-x-5}$.

$\Leftrightarrow -2x - 5 + 2\sqrt{(x+2)(x+3)} \le -x - 5$.

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+2)(x+3)} \le x < 0$: vô nghiệm.

Vậy bất phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$

Ví dụ 13: Giải các bất phương trình:

a) $\sqrt{7x+1}-\sqrt{3x-18} \le \sqrt{2x+7}$ b) $2\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2} > x-2$

Giải

a) Điều kiện: $x \ge 6$. BPT tương đương:

$\sqrt{7x+1} \le \sqrt{2x+7}+\sqrt{3x-18}$

$\Leftrightarrow 7x + 1 \le 2x + 7 + 3x - 18 + 2\sqrt{(2x+7)(3x-18)}$

$\Leftrightarrow x+6 \le \sqrt{6x^2-15x-126} \Leftrightarrow x^2 + 12x + 36 \le 6x^2 - 15x - 126$

$\Leftrightarrow 5x^2 - 27x - 162 \ge 0 \Leftrightarrow x \le -\frac{18}{5}$ hoặc $x \ge 9$. Chọn nghiệm $x \ge 9$.

b) Điều kiện $x \ge 1$. Ta nhân lượng liên hợp $2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2} > 0$

BPT $\Leftrightarrow (2\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2})(2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}) > (x-2)(2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2})$

$\Leftrightarrow 4(x-1) - (x+2) > (x-2)(2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2})$

$\Leftrightarrow 3(x-2) > (x-2)(2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2})$

ABC

Xét các trường hợp sau:

Nếu $1 \le x < 2$: BPT $\Leftrightarrow 3 < 2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}$

$\Leftrightarrow 9 < 4(x-1) + x + 2 + 4\sqrt{(x-1)(x+2)}$

$\Leftrightarrow 11 - 5x < 4\sqrt{x^2 + x - 2}$

$\Leftrightarrow 121 - 110x + 25x^2 < 16x^2 + 16x - 32$

$\Leftrightarrow x^2 - 14x + 17 < 0 \Leftrightarrow 7 - 4\sqrt{2} < x < 7 + 4\sqrt{2}$

Chọn nghiệm $7 - 4\sqrt{2} < x < 2$

Nếu $x = 2$ thì $0 > 0$: loại. Nếu $x > 2$ thì BPT $\Leftrightarrow 3 > 2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}$

Vì $x > 2$ nên VT $> 2\sqrt{1} + \sqrt{3} > 3$: vô nghiệm.

Vậy nghiệm của bất phương trình $7 - 4\sqrt{2} < x < 2$.

Ví dụ 14: Giải các bất phương trình:

a) $\dfrac{4x - 3 + \sqrt{2-x}}{x} \ge 2$ b) $\sqrt[3]{x+1} > \sqrt{x-3}$

Giải

a) Điều kiện $0 \ne x \le 2$. Đặt $t = \sqrt{2-x} \Rightarrow x = 2 - t^2$

BPT: $\dfrac{4t^2 - t - 5}{t^2 - 2} \ge 2 \Leftrightarrow \dfrac{2t^2 - t - 1}{t^2 - 2} \ge 0$

Lập bảng xét dấu vế trái, chọn nghiệm: $0 \le t \le 1$ hoặc $t \ge \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2-x} \le 1$ hoặc $\sqrt{2-x} \ge \sqrt{2} \Leftrightarrow 2 - x \le 1$ hoặc $2 - x \ge 2$

$\Leftrightarrow x \ge 1$ hoặc $x \le 0$. Vậy tập nghiệm là $(-\infty ; 0) \cup (1 ; 2]$.

b) BPT $\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ (x+1)^2 > (x-3)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ (x-7)(x^2 - 3x + 4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ x - 7 < 0 \end{cases}$

(do $x^2 - 3x + 4 > 0, \forall x$).

$\Leftrightarrow 3 \le x < 7$. Vậy tập nghiệm là $[3 ; 7)$.

Ví dụ 15: Giải và biện luận các phương trình:

a) $\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a} = \sqrt{2a}$ b) $\dfrac{\sqrt{4x-2}}{2x-1} = m - 1$

Giải

a) Nếu $a < 0$: phương trình vô nghiệm

Nếu $a = 0$, ta có nghiệm $x = 0$. Nếu $a > 0$, điều kiện $x \ge a$

PT $\Leftrightarrow 2a + 2\sqrt{x^2 - a^2} = 2a \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - a^2} = a - x$

Vì $x \ge a \Rightarrow a - x \le 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - a^2} \le 0 \Rightarrow x = a$

Vậy khi $a < 0$: $S = \varnothing$, khi $a \ge 0$: $S = \{a\}$.

b) Điều kiện: $4x-2\geq 0,\ 2x-1\neq 0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$

$PT \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2(2x-1)}}{2x-1}=m-1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{2x-1}}=m-1$

Nếu $m\leq 1$ thì $m-1\leq 0$: phương trình vô nghiệm.

Nếu $m>1$ thì $PT \Leftrightarrow \frac{2}{2x-1}=(m-1)^2$

$\Leftrightarrow (2x-1)(m-1)^2=2 \Leftrightarrow 2x-1=\frac{2}{(m-1)^2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}+\frac{1}{(m-1)^2}>\frac{1}{2}$

Vậy khi $m\leq 1$ thì $S=\varnothing$, $m>1$ thì $S=\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{(m-1)^2}\right\}$.

Ví dụ 16: Tìm tham số m để phương trình có nghiệm:

a) $3x\sqrt{x}+2x+m\sqrt{x}+2m+16=0$ b) $2x-4=3\sqrt{x-m}$

Giải

a) Đặt $t=\sqrt{x}\geq 0$ với $x\geq 0, t\geq 0$.

Phương trình tương đương:

$3t^3+2t^2+mt+2m+16=0 \Leftrightarrow (t+2)(3t^2-4t+m+8)=0$

Vì $t\geq 0$ nên $3t^2-4t+m+8=0$ (1). PT cho có nghiệm khi phương trình (1) có nghiệm t dương:

$$\begin{cases}\Delta'\geq 0\\ P<0\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}\Delta'\geq 0\\ P\geq 0\\ S>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3m-20>0\\ \frac{m+8}{3}<0\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}-3m-20\geq 0\\ \frac{m+8}{3}\geq 0\\ \frac{4}{3}>0\end{cases} \Leftrightarrow m\leq -\frac{20}{3}.$$

b) Đặt $t=\sqrt{x-m}$ với $x\geq m, t\geq 0$ thì $t^2=x-m$

$PT \Leftrightarrow 2(t^2+m)-4=3t \Leftrightarrow 2t^2-3t+2m-4=0$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) có ít nhất một nghiệm $t\geq 0$.

Ta có: $\Delta=41-16m$, $\Delta\geq 0 \Leftrightarrow m\leq \frac{41}{16}$

Vì $S=\frac{3}{2}>0$ nên khi $\Delta\geq 0$ thì (1) có ít nhất một nghiệm dương. Vậy giá trị cần tìm $m\leq \frac{41}{16}$.

Ví dụ 17: Tìm m để phương trình có nghiệm:

a) $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=a$ b) $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}-\sqrt{(3+x)(6-x)}=m$

Giải

a) Đặt $\begin{cases} u = \sqrt[3]{1+x} \\ v = \sqrt[3]{1-x} \end{cases} \Rightarrow u^2 + v^2 = 2$.

Ta có hệ: $\begin{cases} u+v=a \\ u^2+v^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=a \\ (u+v)^3 - 3uv(u+v) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=a \\ a^3 - 3a.uv = 2 \end{cases}$

Nếu a = 0: Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=0 \\ 0=2 \end{cases}$: vô nghiệm.

Nếu $a \neq 0$: Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=a \\ uv = \dfrac{a^3-2}{3a} \end{cases}$

Do đó u, v là 2 nghiệm của phương trình $X^2 - aX + \dfrac{a^3-2}{3a} = 0$

Điều kiện có nghiệm: $a \neq 0$ và $\Delta \geq 0$:

$\Leftrightarrow a^2 - 4\left(\dfrac{a^3-2}{3a}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{8-a^3}{3a} \geq 0 \Leftrightarrow a(8-a^3) \geq 0$

$\Leftrightarrow a(2-a)(4+2a+a^2) \geq 0 \Leftrightarrow a(2-a) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 2$

Vậy giá trị cần tìm: $0 < a \leq 2$.

b) Đặt $t = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} \geq 0$, $-3 \leq x \leq 6$.

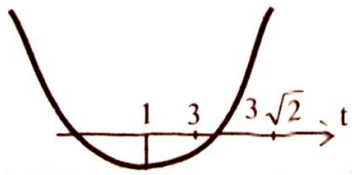
thì $9 \leq t^2 = 9 + 2\sqrt{(3+x)(6-x)} \leq 9 + (3+x+6-x) = 18 \Rightarrow 3 \leq t \leq 3\sqrt{2}$

Bài toán trở thành tìm m để phương trình sau có nghiệm $t \in [3 ; 3\sqrt{2}]$

$f(t) = t^2 - 2t + 2m - 9 = 0$ (2)

Vì $\dfrac{S}{2} = 1 < 3 < 3\sqrt{2}$ nên phương trình (2)

có nghiệm thuộc $[3 ; 3\sqrt{2}]$ khi và chỉ khi:



$\begin{cases} f(3) \leq 0 \\ f(3\sqrt{2}) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{6\sqrt{2}-9}{2} \leq m \leq 3.$

Cách khác: Đánh giá tham số m: $t^2 - 2t - 9 = -2m$.

Ví dụ 18: Cho phương trình: $(x-2)(x+2) + 3(x-2)\sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}} = m(m+3)$

a) Giải phương trình khi m = 1.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình có nghiệm duy nhất.

Giải

Điều kiện $x \leq -2$ hoặc $x > 2$. Đặt $t = (x-2)\sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}$

PT: $t^2 + 3t - m(m+3) = 0 \Leftrightarrow t = 2m$ hoặc $t = -2(m+3)$

a) Khi m = 1 thì t = 2 hoặc t = –8

$\Leftrightarrow (x-2)\sqrt{\frac{x+2}{x-2}} = 2$ hoặc $(x-2)\sqrt{\frac{x+2}{x-2}} = -8$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2>0 \\ (x-2)^2\dfrac{x+2}{x-2}=4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-2}>0, x-2<0 \\ (x-2)^2\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)=64 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x^2=8 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x<-2 \text{ hay } x>2, x<2 \\ x^2-4=64 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}$ hoặc $x = -\sqrt{68}$.

b) Hệ có nghiệm duy nhất khi $2m = -2(m+3) \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$.

Ví dụ 19: Giải và biện luận bất phương trình:

a) $\sqrt{x-2}\,(mx-3) > 0$ b) $\sqrt{x} - \sqrt{x-1} > a$ với $a > 0$

Giải

a) Điều kiện $x > 2$.

Từ việc so sánh $\frac{3}{m}$ với 2 ta phân chia 4 trường hợp sau:

Nếu $m < 0$: bất phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x<\dfrac{3}{m} \end{cases}$: vô nghiệm

Nếu $m = 0$: bất phương trình $-3\sqrt{x-2} > 0$: vô nghiệm

Nếu $0 < m \le \frac{3}{2}$: bất phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x>\dfrac{3}{m} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{3}{m}$

Nếu $m > \frac{3}{2}$: bất phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x>\dfrac{3}{m} \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$

b) Điều kiện $x \ge 0, x \ge 1 \Leftrightarrow x \ge 1$

BPT $\Leftrightarrow \sqrt{x} > a + \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x > a^2 + x - 1 + 2a\sqrt{x-1} \Leftrightarrow 2a\sqrt{x-1} < 1 - a^2$

Theo giả thiết $a > 0$ nên khi $a \ge 1$ thì VT > 0, VP < 0: vô nghiệm.

Khi $0 < a < 1$ thì BPT $\Leftrightarrow 4a^2(x-1) < 1 + a^4 - 2a^2$

$\Leftrightarrow x < \frac{a^2 - 2a^2 + 1}{4a^2} + 1 \Leftrightarrow x < \left(\frac{a^2-1}{2a}\right)^2 + 1$

Chọn nghiệm $1 \le x < \left(\frac{a^2-1}{2a}\right)^2 + 1$.

Ví dụ 20: Tìm m để bất phương trình:

a) $2x + m > \sqrt{5-x}$ có nghiệm

b) $\sqrt{(1+2x)(3-x)} > m + (2x^2 - 5x + 3)$ có nghiệm với mọi $x \in \left[-\frac{1}{2}; 3\right]$.

Giải

a) Đặt $t = \sqrt{5-x}$ với $x \le 5$, $t \ge 0$ thì $t^2 = 5 - x$

BPT: $2(5 - t^2) + m > t \Leftrightarrow m > 2t^2 + t - 10$ (*)

$f(t) = 2t^2 + t - 10$ có $a = 2 > 0$, hoành độ đỉnh $t = -\frac{1}{4} < 0$

Điều kiện BPT đã cho có nghiệm là BPT (*) có nghiệm $t \ge 0$:

$m > \min\limits_{t\ge 0} f(t) \Leftrightarrow m > f(0) \Leftrightarrow m > -10$.

b) Điều kiện: $-\frac{1}{2} \le x \le 3$. Đặt $t = \sqrt{(1+2x)(3-x)}$ $(t \ge 0)$

$\Leftrightarrow t^2 = 3 + 5x - 2x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x = 3 - t^2$.

Ta có: $t.\sqrt{2} = \sqrt{(1+2x)(6-2x)} \le \frac{(1+2x)+(6-2x)}{2} = \frac{7}{2}$ nên $0 \le t \le \frac{7\sqrt{2}}{4}$.

BPT $\Leftrightarrow t > m + 3 - t^2 + 3 \Leftrightarrow m < t^2 + t - 6$

$f(t) = t^2 + t - 6$ có $a = 1 > 0$, hoành độ đỉnh $t = -\frac{1}{2} < 0$

Điều kiện BPT đã cho có nghiệm với mọi $x \in \left[-\frac{1}{2}; 3\right]$ là $m < f(t)$, $\forall t \in \left[0; \frac{7\sqrt{2}}{4}\right]$

$\Leftrightarrow m < \min f(t) = f(0) \Leftrightarrow m < -6$.

DẠNG 3: HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Phương pháp chung: Rút thế, cộng đại số, đặt ẩn phụ, ... để đưa về phương trình thường gặp: Hệ bậc nhất, hệ có bậc nhất, hệ đối xứng loại I, loại II, ... đã luyện tập trong chương trước.

Ví dụ 1: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2(x+y) = 3\left(\sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{xy^2}\right) \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6 \end{cases}$

Giải

a) Đặt $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt{y}$ với $x, y \ge 0$; $u, v \ge 0$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} u^2v + uv^2 = 30 \\ u^3 + v^3 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv(u+v) = 30 \\ (u+v)^3 - 3uv(u+v) = 35 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} uv(u+v) = 30 \\ (u+v)^3 = 125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v = 5 \\ u.v = 6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 3 \end{cases}$ hay $\begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 9 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 9 \\ y = 4 \end{cases}$

Vậy hệ có 2 nghiệm: (4 ; 9), (9 ; 4).

b) Đặt $u = \sqrt[3]{x}$, $v = \sqrt[3]{y}$

Hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} 2(u^3+v^3) = 3(u^2v+uv^2) \\ u+v=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left[(u+v)^3 - 3uv(u+v)\right] = 3uv(u+v) \\ u+v=6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 9uv(u+v) = 2(u+v)^3 \\ u+v=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=6 \\ u.v=8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=4 \end{cases}$ hay $\begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=64 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x=64 \\ y=8 \end{cases}$

Vậy hệ có 2 nghiệm: (8 ; 64), (64 ; 8).

Ví dụ 2: Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{2-y} = \sqrt{3} \\ \sqrt{2-x} + \sqrt{y+1} = \sqrt{3} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = xy^3 + 2x^2y \\ \sqrt{x+9} + \sqrt{y+9} = 6 \end{cases}$

Giải

a) Điều kiện $-1 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 2$. Trừ vế theo vế:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{y+1} + \sqrt{2-y} - \sqrt{2-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}} + \frac{x-y}{\sqrt{2-y}+\sqrt{2-x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}} + \frac{1}{\sqrt{2-y}+\sqrt{2-x}}\right) = 0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y.$$

Thế vào phương trình đầu $\sqrt{x+1} + \sqrt{2-x} = \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 3 + 2\sqrt{(x+1)(2-x)} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(2-x)} = 0.$

$\Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 2$. Do đó $y = -1$ hoặc $y = 2$ (chọn)

Vậy hệ có 2 nghiệm $(-1 ; -1)$, $(2 ; 2)$.

b) Điều kiện: $x \ge 0$, $y \ge 0$. Do đó $\sqrt{x+9} + \sqrt{y+9} \ge 3+3 = 6$ nên từ phương trình sau thì $x = y = 0$. Thế vào phương trình đầu $0 = 0$: đúng

Vậy hệ có nghiệm duy nhất (0 ; 0).

Ví dụ 3: Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + \sqrt{y^2-x^2} = 12 - y \quad (1) \\ x.\sqrt{y^2-x^2} = 12 \quad (2) \end{cases}$

Giải

a) Điều kiện $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2} \\ x+y+2\sqrt{xy} = 16 \end{cases}$

Do đó $\sqrt{2(x^2+y^2)} = x+y \Rightarrow 2x^2+2y^2 = x^2+y^2+2xy$

$\Rightarrow x^2-2xy+y^2 = 0 \Rightarrow (x-y)^2 = 0 \Rightarrow x = y$

nên $\sqrt{x}+\sqrt{y} = 4 \Rightarrow 2\sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 4$ nên $y = 4$ (thoả)

Vậy hệ có nghiệm: (4 ; 4).

b) Điều kiện $y^2 \geq x^2$, $x > 0$

Từ (1) $\Rightarrow x^2+y^2-x^2+2x\sqrt{y^2-x^2} = 144-24y+y^2$

$\Rightarrow 2x\sqrt{y^2-x^2} = 144-24y$ và từ (2) thì được: $12 = 144-24y \Rightarrow y = 5$

Do đó (2): $x\sqrt{25-x^2} = 12 \Leftrightarrow x^2(25-x^2) = 144$

$\Leftrightarrow x^4-25x^2+144 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9$ hoặc $x^2 = 16$

Từ điều kiện thì chọn được 2 nghiệm: (3 ; 5) và (4 ; 5).

Ví dụ 4: Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases}\sqrt{x+y} = \sqrt[3]{x+y} & (1)\\ \sqrt{x-y} = \sqrt[3]{x-y-12} & (2)\end{cases}$ b) $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y} = 4\\ x^2+y^2 = 128\end{cases}$

Giải

a) Điều kiện: $x+y \geq 0$, $x-y \geq 12$. Từ phương trình sau ta có:

$(x-y)^3 = (x-y-12)^2$

$\Rightarrow (x-y)^3-(x-y)^2+24(x-y)-144 = 0$

$\Rightarrow (x-y)[(x-y)^2+3(x-y)+36] = 0$

vì $(x-y)^2+3(x-y)+36 > 0$ $\forall x$, $\forall y$ nên $x-y = 4$ (loại)

Vậy hệ vô nghiệm.

b) Điều kiện: $x+y \geq 0$, $x-y \geq 0$. Đặt $u = \sqrt{x+y}, v = \sqrt{x-y}$ với $u, v > 0$.

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases}u+v = 4\\ u^4+v^4 = 256\end{cases}$

Ta có: $256 = u^4+v^4 = (u^2+v^2)^2-2u^2v^2 = (4^2-2uv)^2-2u^2v^2$

$\Rightarrow uv(uv-32) = 0$

Xét $uv = 0$ thì $u = 0$, $v = 4$ hoặc $u = 4$, $v = 0$

nên $x = 8$, $y = -8$ hoặc $x = 8$, $y = 8$

Xét $uv = 32$ thì u, v là nghiệm của phương trình: $X^2-4X+32 = 0$ ($\Delta < 0$)

Vậy hệ có 2 nghiệm là: (8 ; –8) và (8 ; 8).

Ví dụ 5: Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases}|x+y| = 2\\ |x|+|y| = 2\end{cases}$ b) $\begin{cases}|x+y|+x+1 = 0 & (1)\\ 2|x|+|y| = 2x+2 & (2)\end{cases}$

Giải

a) Từ hệ suy ra $|x|+|y| = |x+y|$ nên $xy \geq 0$

Xét $x \geq 0$, $y \geq 0$ thì hệ phương trình: $x+y = 2$, do đó hệ có vô số nghiệm $x = t$, $y = 2-t$ với $0 \leq t \leq 2$.

Xét $x \leq 0$, $y \leq 0$ thì hệ tương đương $x+y = -2$, do đó hệ có vô số nghiệm $x = t$, $y = -2-t$ với $-2 \leq t \leq 0$.

b) Từ (1) $\Rightarrow x + 1 \le 0 \Rightarrow x \le -1$.

(2) $\Rightarrow 2x + 2 \ge 0 \Rightarrow x \ge -1$ do đó $x = -1$.

Thế $x = -1$ vào hệ $\begin{cases} |-1+y| = 0 \\ 2+|y| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ |y| = -2 \end{cases}$: vô nghiệm.

Vậy hệ đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 6: Tìm tất cả các số nguyên x, y thoả mãn: $\begin{cases} |x^2 - 2x| < y + \dfrac{1}{2} & (1) \\ y + 1|x-1| < 2 & (2) \end{cases}$

Giải

Từ (1) $\Rightarrow y + \dfrac{1}{2} \ge 0 \Rightarrow y \ge -\dfrac{1}{2} \Rightarrow y \ge 0$ (vì y nguyên)

(2) $\Rightarrow y + |x - 1| \le 1$

Mà $y \ge 0$ nên $|x - 1| \le 1 \Rightarrow |x - 1| = 0$ hoặc $|x - 1| = 1$

$\Rightarrow x = 1$ hoặc $x = 0$ hoặc $x = 2$.

Xét $x = 0$ thì hệ: $\begin{cases} y > -1 \\ y < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} < y < 1$. Chọn $y = 0$

Xét $x = 1$ thì hệ: $\begin{cases} y \ge \dfrac{1}{2} \\ y \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \le y < 2$. Chọn $y = 1$.

Xét $x = 2$ thì hệ: $\begin{cases} y > -\dfrac{1}{2} \\ y < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} < y < 1$. Chọn $y = 0$

Vậy hệ có 3 nghiệm: (0; 0), (1; 1), (2; 0).

Ví dụ 7: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:

a) $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = m & (1) \\ \sqrt{x} + \sqrt{y+1} = 1 & (2) \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 - 3m \end{cases}$

Giải

a) Điều kiện $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Nên $1 = \sqrt{x} + \sqrt{y+1} \ge \sqrt{y+1} \ge 1$, do đó (2) $\Leftrightarrow x = y = 0$

Do đó (1) $\Leftrightarrow m = 1$. Vậy điều kiện hệ có nghiệm là $m = 1$.

b) Điều kiện $x, y \ge 0$. Đặt $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt{y}$. $(u, v \ge 0)$

Hệ $\begin{cases} u + v = 1 \\ u^3 + v^3 = 1 - 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 1 \\ uv = m \end{cases}$

Điều kiện hệ có nghiệm là phương trình $X^2 - SX + P = 0$

$\Leftrightarrow X^2 - X + m = 0$ có 2 nghiệm không âm:

$\Delta \ge 0$; $S \ge 0$, $P \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le m \le \dfrac{1}{4}$.

Ví dụ 8: Tìm a để hệ có đúng 4 nghiệm: $\begin{cases}1-\sqrt{|x-1|}=\sqrt{7|y|}\\49y^2+x^2+4a=2x-1\end{cases}$

Giải

Đặt $u=\sqrt{|x-1|}$, $v=\sqrt{7|y|}$, với $u, v \geq 0$. Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases}u+v=1\\u^4+v^4=-4a\end{cases}$

Để ý, nếu hệ có nghiệm (u, v) với u, v dương thì hệ có 4 cặp nghiệm (x, y), do đó hệ có đúng 4 nghiệm (x, y) thì u = 0, v = 1 hoặc u = 1, v = 0 hoặc $u=v=\frac{1}{2} \Rightarrow a=-\frac{1}{4}$ hoặc $a=-\frac{1}{32}$

Thử lại đúng. Vậy giá trị cần tìm là $a=-\frac{1}{4}$ hoặc $a=-\frac{1}{32}$.

Ví dụ 9: Tìm m để hệ phương trình sau có một nghiệm duy nhất:

a) $\begin{cases}x^2=2^{|x|}+|x|-y=m & (1)\\x^2=1-y^2 & (2)\end{cases}$ b) $\begin{cases}\sqrt{1+x}+\sqrt{6-y}=m\\\sqrt{1+y}+\sqrt{6-x}=m\end{cases}$

Giải

a) Nếu (x, y) là một nghiệm thì (–x; y) cũng là nghiệm. Nên điều kiện cần để hệ có một nghiệm duy nhất là $x=-x \Rightarrow x=0$.

Khi x = 0 thì (2) $\Rightarrow y=\pm 1$ nên (1) $\Rightarrow$ m = 0 hoặc m = 2.

Thử lại, nếu m = 2 hệ trở thành $\begin{cases}x^2+y+2=2^{|x|}+|x|\\x^2=1-y^2\end{cases}$

Hệ có 2 nghiệm (0; 1) và (1; 0): loại

Nếu m = 0 hệ trở thành $\begin{cases}x^2+y=2^{|x|}+|x|\\x^2=1-y^2\end{cases}$

Ta có $-1 \leq x; y \leq 1 \Rightarrow \begin{cases}x^2 \leq |x|\\y \leq 1 \leq 2^{|x|}\end{cases} \Rightarrow x^2+y \leq 2^{|x|}+|x|$

Do đó các đẳng thức xảy ra tức là: x = 0, y = 1.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất khi m = 0.

b) Điều kiện $-1 \leq x \leq 6, -1 \leq y \leq 6$.

Mà (x; y) là một nghiệm thì (y; x) cũng là nghiệm, do đó hệ có nghiệm duy nhất thì x = y, phương trình đầu trở thành: $\sqrt{1+x}+\sqrt{6-x}=m$ (**)

Nếu x là nghiệm của (*) thì 5 – x cũng là nghiệm, do đó để phương trình (*) có nghiệm duy nhất thì: $x=5-x \Rightarrow x=\frac{5}{2} \Rightarrow m=\sqrt{14}$

Thử lại khi $m=\sqrt{14}$ thì phương trình: $\sqrt{1+x}+\sqrt{6-x}=\sqrt{14}$ có nghiệm duy nhất. Vậy $m=\sqrt{14}$.

C. BÀI LUYỆN TẬP

1. Giải phương trình:

a) $|x^2 - 5x + 4| = x + 4$

b) $x^2 - 2x + 8 = |x^2 - 1|$

c) $|x^2 + 2x - 3| - 2|x - 1| + 1 = 0$

d) $|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4$

ĐS: a) x =0, x = 6 d) $1 \le x \le 2$, x =5

2. Giải phương trình:

a) $|2x + 12| = |4 - 5x|$

b) $|2 - 3x^2| = |6 - x^2|$

c) $|x^2 - 1| = -|x| + 1$

d) $|1 - x| = 1 + x + x^3$

3. Giải phương trình:

a) $\dfrac{x^2 - 1}{|x - 2|} = x$

b) $\dfrac{x^2 - 1 + |x + 1|}{|x|(x - 2)} = 2$

c) $(x^2 - x)^2 + |x^2 - x| - 6 = 0$

d) $|x^2 - 5x + 5| = -2x^2 + 10x - 11$

ĐS: a) $\dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ d) 2 và 3

4. Giải phương trình:

a) $|7 - 2x| = |5 - 3x| + |x + 2|$

b) $|3 - 2x| + |x^2 + x - 2| = |x^2 + 3x - 5|$

c) $|x - 9|^9 + |x - 10|^{10} = 1$

d) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 5 - x^2$

ĐS: a) $-2 \le x \le \dfrac{5}{3}$ c) x =9, x =10

5. Giải phương trình:

a) $y^2 + |x + 2| + 4 = 4y$

b) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 5$

6. Giải và biện luận phương trình:

a) $|x - 1|(x + 2) + m = 0$

b) $|x^2 + x + m| = -x^2 + x + 2$

c) $a|x + 2| + a|x - 1| = b$

d) $\dfrac{x^2 + x}{|2x - 2|} = m$

7. Tìm m để phương trình:

a) $x + |x^2 - 2x + m| = 0$ có nghiệm

b) $|x - 2| + |x + 3| = m$ vô nghiệm

c) $(x - 3)^2 = 5|x - m|$ có 4 nghiệm phân biệt

d) $mx^2 - 2(m - 1)x + 2 = |mx - 2|$ có nghiệm duy nhất

ĐS: b) m < 5 d) m = 2

8. Giải các bất phương trình:

a) $|2x - 1| \ge x - 1$

b) $|x| + 3|x + 1| < 5$

c) $|2x + 5| \ge |7 - 4x|$

d) $|x| \le 2|x - 4| + x - 2$

9. Giải các bất phương trình:

a) $|x^2-3x+2|+x^2>2x$ b) $|x^2-1|<2x$

c) $\left|\frac{2x+7}{3x-2}\right|\le 3$ d) $\left|\frac{1}{x}-5\right|>10$

ĐS: a) $x<\frac{1}{2}, x>2$ c) $-\frac{1}{5}<x<\frac{1}{15}, x\neq 0$

10. Giải các bất phương trình:

a) $\frac{2x-5}{|x-3|}+1>0$ b) $\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|\le 1$ c) $\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}\ge 1$

ĐS: c) $x\le -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}<x\le 2$

11. Giải các bất phương trình:

a) $|x^3-8|>2-x$ b) $|x+2|+|x-2|\ge 2(x^3-1)$

c) $||x-4|-2|\le x$ d) $\left||x^2-3x+2|x-1|\right|>-2$

12. Giải các bất phương trình:

a) $\sqrt{x^2-6x+9}-2|x+2|\ge 1$ b) $\sqrt{x^4-2x^2+1}+x\ge 1$

ĐS: b) $x\le -2, x\ge 0$

13. Tìm tập xác định của hàm số theo tham số:

a) $y=\sqrt{|x-4|+2-m}$ b) $y=\sqrt{\frac{m-x}{|x+1|}}$

14. Giải và biện luận bất phương trình:

a) $|6-2x|>2m+1$ b) $|3x+2|\le m-1$

15. Giải và biện luận bất phương trình:

a) $|x^2-5x+4|<a$ b) $|x^2-2x+a|\le|x^2-3x-a|$

HD: xét điều kiện rồi bình phương

16. Tìm a để bất phương trình:

a) $x^2+2|x-a|+a^2+a-1\le 0$ có nghiệm

b) $|x|+|x+1|+|x+4|<a$ vô nghiệm.

17. Tìm a để bất phương trình:

a) $3-|x-a|>x^2$ có ít nhất một nghiệm âm

b) $\frac{x}{1+|x|}\ge ax^2+x$ có nghiệm với mọi x.

ĐS: a) $-1\le a\le\frac{1}{2}$ b) $-\frac{13}{4}<a<3$

18. Giải hệ: a) $\begin{cases} |x+1|+|y-1|=5 \\ |x+1|-4y=-4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} |x|+y=x^2 \\ |y|+x=y^2 \end{cases}$

19. Giải hệ: a) $\begin{cases} |x+y|=1 \\ |x|+|y|=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} |x^2-4x|-5\le 0 \\ |x+1|\le 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ |x+y|+|x-y|\le 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y-|x^2-x|\ge 1 \\ |y-2|+|x+1|\le 1 \\ x,y\in Z \end{cases}$

ĐS: d) (0;0),(1;1),(1;2),(1;3)

20. Giải và biện luận: $\begin{cases} |x+y|=x-y+a \\ |x-y|=x+y+b \end{cases}$

21. Tìm m để hệ:

a) $\begin{cases} |x|+|y|=1 \\ x^2+y^2=m \end{cases}$ có nghiệm b) $\begin{cases} |x-m|\le m \\ |x-1+m|\le 2m \end{cases}$ có nghiệm duy nhất

ĐS: a) $\frac{1}{2}\le m\le 1$ b) $m=\frac{1}{5}$

22. Giải phương trình:

a) $\sqrt{2x-3}=x-3$ b) $\sqrt{x^2-3x-1}+7=2x$

c) $\sqrt{3x+1}=5-\sqrt{2x+7}$ d) $\sqrt{2x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1}=2x+2$

23. Giải phương trình:

a) $\frac{x-2}{\sqrt{2x-7}}=\sqrt{3x+1}$ b) $x+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=2$

ĐS: b) $x=2-\sqrt{2}$

24. Giải phương trình:

a) $x^2-x-15-\sqrt{x^2-x-9}=0$ b) $(x+1)(x+4)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$

HD: đặt ẩn phụ

25. Giải phương trình:

a) $x+\sqrt{17-x^2}+x\sqrt{17-x^2}=9$

b) $x^2+\sqrt{x+5}=5$

c) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$

d) $7\sqrt{x^3+1}=\sqrt{6}(x^2+2)$

HD: đặt 1 hoặc 2 ẩn phụ

26. Giải phương trình:

a) $x^2+3x+1=(x+3)\sqrt{x^2+1}$

b) $4\sqrt{1+x}-1=3x+2\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x^2}$

27. Giải phương trình:

a) $\frac{x^2}{\sqrt{3x-2}} - \sqrt{3x-2} = 1-x$ b) $\sqrt{x+9} - \sqrt{x+1} = \sqrt{x+4} - \sqrt{x}$

ĐS: a) x = 1 b) x = 0

28. Giải phương trình:

a) $\sqrt{3x^2-9x+1} = |x-2|$ b) $\sqrt{x^2+2x+1} = 3\sqrt{4x^2+4x+1} + 3 - 2x^2$

29. Giải phương trình:

a) $\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}} + \sqrt{x+1-2\sqrt{x+7}} = 4$

b) $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = \frac{x+5}{2}$

30. Giải phương trình:

a) $\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2} = \frac{x+3}{5}$

b) $(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1-x}+1) = 2x$

c) $\sqrt{3x^2-7x+3} - \sqrt{3x^2-5x-1} = \sqrt{x^2-2} - \sqrt{x^2-3x+4}$

HD: nhân lượng liên hợp

31. Giải phương trình:

a) $\sqrt{2x-3} + \sqrt{5-2x} = x^2 - 4x + 6$

b) $x^2 + 11x + 42 = 2x\sqrt{11x+42}$

c) $\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x^2+4x+1}$

d) $2\sqrt{(5x-2)(x^2+x+1)} = x^2 + 6x - 1$

HD: đánh giá 2 vế

32. Giải phương trình:

a) $\sqrt{x-16} + \sqrt{x-9} = 7$ b) $3\sqrt{x-8} = 5 + \sqrt{13-x}$

c) $\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} = \frac{1}{2}(x+y+z)$

ĐS: c) x =1, y =2, z =3.

33. Giải phương trình:

a) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$

b) $x^2 - 6x + 15 = \sqrt{x^2-6x+18}(x^2-6x+11)$

c) $\sqrt{3x^2+6x+7} + \sqrt{5x^2+10x+14} = 4 - 2x - x^2$

HD: đánh giá 2 vế

34. Giải phương trình căn bậc cao:

a) $\sqrt[3]{x^2+3x-4} = x-1$ b) $\sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{2-x} = 3$

c) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} = 0$ d) $x.\sqrt[3]{35-x^3}\,(x + \sqrt[3]{35-x^3}) = 30$

ĐS: a) $1; \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$ d) 2, 3

35. Giải và biện luận:

a) $\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}=\sqrt{2a}$ b) $\sqrt{x^2-1}-x=m$

c) $x+\sqrt{a+\sqrt{x}}=a$ d) $\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{x+b}=1$

36. Tìm điều kiện có nghiệm:

a) $x+3=2\sqrt{2x-m}$ b) $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}-\sqrt{(x+1)(3-x)}=m$

c) $(x-3)(x+1)+4(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}=m$

37. Giải phương trình:

a) $x^4+\sqrt{x^2+13}-13=0$ b) $x=\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$

ĐS: b) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

38. Giải phương trình:

a) $2\sqrt{x^2-2x+4}=\sqrt{x^2-2x+3}+1$

b) $(4x-1)\sqrt{x^2+1}=2x^2+2x+1$

39. Giải phương trình:

a) $x^2+4x+5=2\sqrt{2x+3}$

b) $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1}=x^2-x+2$

HD: dùng bất đẳng thức Côsi

40. Giải bất phương trình:

a) $\sqrt{2x^2+x-3}<1+x$ b) $\sqrt{2x^2-6x+1}>x-2$

c) $\sqrt{x-5}-\sqrt{9-x}>1$ d) $\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}>\sqrt{2x-8}$

41. Giải bất phương trình:

a) $\sqrt{x^2-x-12}\geq x^2-x+2$

b) $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}}>x+1$

c) $\sqrt{(x-3)(x-5)}>\sqrt{(x+2)(x-1)}-4$

d) $\dfrac{2}{2+\sqrt{4-x^2}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{4-x^2}}>\dfrac{1}{x}$

42. Giải bất phương trình:

a) $x^2-3>\sqrt{x^2-2x+1}$ b) $\sqrt{x^4-2x^2+1}>1-x$

c) $\sqrt{|x-2|}\leq 4-2x$ d) $\sqrt{x+1}>|2x-1|+2x$

43. Giải bất phương trình:

a) $(x-3)\sqrt{x^2+4} \le x^2-9$ b) $(x-2)\sqrt{x^2+1} \ge x^2-4$

c) $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-4x+3} \ge 2\sqrt{x^2-5x+4}$

HD: đưa về tích số

44. Giải bất phương trình:

a) $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2} \le \frac{1}{x}$ b) $\frac{x+1}{x}-2\sqrt{\frac{x+1}{x}} > 3$

c) $(x+1)(x+4) < 5\sqrt{x^2+5x+28}$ d) $5\sqrt{x}+\frac{5}{2\sqrt{x}} \le 2x+\frac{1}{2x}+4$

45. Giải bất phương trình:

a) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x} \le x$ b) $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3$

c) $2\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2} > x-2$ d) $4(x+1)^2 < (2x+10)(1-\sqrt{3+2x})^2$

HD: nhân lượng liên hợp

46. Giải bất phương trình:

a) $\sqrt[3]{x^2-8x+1} > \sqrt[3]{x-9}$ b) $\sqrt[3]{2-x} > 1-\sqrt{x-1}$

c) $2\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2} \ge 3\sqrt[4]{(3x-2)(x+2)}$

47. Giải bất phương trình:

a) $\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x} \ge x^2-8x+18$ b) $\sqrt{\frac{1-2x}{2+x}}+\sqrt{\frac{2+x}{1-2x}} > 2$

c) $\sqrt{x}+\sqrt{x-5} \le \sqrt{5}$ d) $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{1-x} \le \sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}}$

HD: đánh giá 2 vế

48. Tìm điều kiện để các bất phương trình:

a) $\sqrt{4-x}+\sqrt{x+5} \ge m$ có nghiệm

b) $\sqrt{(4+x)(6-x)} \le x^2-2x+m$ có nghiệm $\forall x$

49. Giải và biện luận:

a) $\sqrt{2x^2+3} < x-a$ b) $\sqrt{x}-\sqrt{x-1} > a^2$

c) $x \le a^2+\sqrt{x-a}$ d) $\sqrt{x-4a+16} \ge \sqrt{x}+2\sqrt{x-2a+4}$

50. Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6 \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{x^2+5}+\sqrt{y^2-5}=5 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$

ĐS: b) $(\pm 2; \pm 3)$

51. Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{3-y}=2\\ \sqrt{y+1}+\sqrt{3-x}=2\end{cases}$ b) $\begin{cases}\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=2\\ \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=4\end{cases}$

52. Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases}(1-\dfrac{12}{y+3x})\sqrt{x}=2\\ (1+\dfrac{12}{y+3x})\sqrt{y}=6\end{cases}$ b) $\begin{cases}(3-\dfrac{5}{y+42x})\sqrt{2y}=4\\ (3+\dfrac{5}{y+42x})\sqrt{x}=2\end{cases}$

53. Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=1\\ |x|+|y|=1\end{cases}$ b) $\begin{cases}\sqrt{xy}+\sqrt{1-y}\le\sqrt{y}\\ 2\sqrt{xy-y}-\sqrt{y}=-1\end{cases}$

ĐS: a) (0;1), (1;0) b) (1;1)

54. Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases}x=\sqrt{y}+1\\ y=\sqrt{z}+1\\ z=\sqrt{x}+1\end{cases}$ b) $\begin{cases}x+y=2\sqrt{yz}\\ y+z=2\sqrt{zx}\\ z+x=2\sqrt{xy}\\ x^2+y^2+z^2=12\end{cases}$

ĐS: b) x = y = z = 2

55. Giải và biện luận hệ phương trình:

a) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=a\\ x+y-\sqrt{xy}=a\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x+\sqrt{y-1}=m\\ 2y+\sqrt{x-1}=m\end{cases}$

56. Tìm điều kiện để hệ phương trình:

a) $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y+2}=a\\ x+y=3a\end{cases}$ có nghiệm

b) $\begin{cases}\sqrt{x+2}+\sqrt{5-y}=m\\ \sqrt{y+2}+\sqrt{5-x}=m\end{cases}$ có nghiệm duy nhất

ĐS: a) $\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}\le a\le 3+\sqrt{15}$

Chương 5: THỐNG KÊ

§1. MỘT VÀI KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Thống kê là khoa học về các phương pháp thu thập, tổ chức, trình bày, phân tích và xử lí dữ liệu.
- Một tập con hữu hạn các đơn vị điều tra được gọi là một mẫu, số phần tử của một mẫu được gọi là kích thước mẫu N.
- Các giá trị của dấu hiệu thu được trên mẫu được gọi là một mẫu số liệu.

B. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Để điều tra số con trong mỗi gia đình ở huyện A, người ta chọn ra 80 gia đình, thống kê số con của các gia đình đó và thu được mẫu số liệu sau:

2	4	3	2	0	2	2	3	4	5
2	2	5	2	1	2	2	2	3	2
5	2	7	3	4	2	2	2	3	2
3	5	2	1	2	4	4	3	4	3
4	4	4	4	2	5	1	4	4	3
3	4	1	4	4	2	4	4	4	2
3	2	3	4	5	6	2	5	1	4
1	6	5	2	1	1	2	4	3	1

a) Dấu hiệu và đơn vị điều tra ở đây là gì? Kích thước mẫu là bao nhiêu?

b) Hãy viết các giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên.

Giải

a) Dấu hiệu: Số con trong một gia đình. Đơn vị điều tra: Một gia đình ở huyện A. Kích thước mẫu là 80.

b) Có tám giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên là 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7.

Ví dụ 2: Điều tra về điện năng tiêu thụ trong một tháng (tính theo kW/h) của 30 gia đình ở một khu phố A, người ta thu được mẫu số liệu sau:

165	85	65	65	70	50	45	100	45	100
100	100	100	90	53	70	141	42	50	150
40	70	84	59	75	57	133	45	65	75

a) Dấu hiệu và đơn vị điều tra? Kích thước mẫu?

b) Hãy viết các giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên.

Giải

a) Dấu hiệu: Số điện năng tiêu thụ trong một tháng của một gia đình. Đơn vị điều tra: Một gia đình ở khu phố A. Kích thước mẫu là 30.

b) Có 18 giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên là:

40	42	45	50	53	57	59	65	70
75	84	85	90	100	133	141	150	165

ABC

C. BÀI TẬP

Bài 1: Để điều tra về trọng lượng gạo xuất khẩu của một Công ty C, người ta chọn ra 30 bao gạo hoặc 50 (kg) và thu được mẫu số liệu:

49	50	49	50	47	59	49	51	51	50
48	49	49	50	50	49	50	51	52	52
51	48	49	50	50	50	51	50	49	49

a) Dấu hiệu và đơn vị điều tra? Kích thước mẫu?

b) Có bao nhiêu giá trị khác nhau trong mẫu số liệu?

ĐS: b) 6 giá trị khác nhau.

Bài 2: Để kiểm tra chất lượng học toán ở một trường D, người ta chọn ra 27 học sinh ở nhiều lớp khác nhau và thu được bảng điểm của bài kiểm tra 45 phút:

9	7	8	4	9	10	8	9	10
1	3	10	8	8	8	6	9	6
7	6	5	5	4	7	8	4	4

a) Dấu hiệu và đơn vị điều tra? Kích thước mẫu?

b) Có bao nhiêu giá trị khác nhau trong mẫu số liệu?

HD: b) Đếm và gạch bỏ các giá trị bằng nhau từ trái qua phải rồi từ hàng trên xuống hàng dưới hoặc sắp các giá trị theo thứ tự không giảm để đếm.

Bài 3: Điều tra về thời gian hoàn thành một sản phẩm của 40 công nhân, người ta thu được mẫu số liệu (sau thời gian tính bằng phút).

10	12	24	25	17	17	13	22	28	11
11	20	15	16	12	16	21	11	16	13
23	21	10	21	17	24	23	17	19	17
15	11	20	24	12	19	10	16	26	20

a) Dấu hiệu ở đây là gì? Kích thước mẫu là bao nhiêu?

b) Hãy viết các giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên.

ĐS: a) Dấu hiệu điều tra là thời gian hoàn thành một sản phẩm của một công nhân. Kích thước mẫu là 40.

b) Các giá trị khác nhau trong mẫu số liệu:

10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28.

§2. TRÌNH BÀY MẪU SỐ LIỆU

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Số lần xuất hiện của mỗi giá trị trong mẫu số liệu được gọi là tần số của giá trị đó.

- Tần suất f_i của giá trị x_i là tỷ số giữa tần số n_i và kích thước mẫu N: $f_i = \frac{n_i}{N}$

- Bảng phân bố tần số:

Giá trị (x)							
Tần số (n)							N

- Bảng phân bố tần số - tần suất:

Giá trị (x)							
Tần số (n)							N
Tần suất %							

Có thể viết dạng cột dọc

Giá trị	Tần số
	N

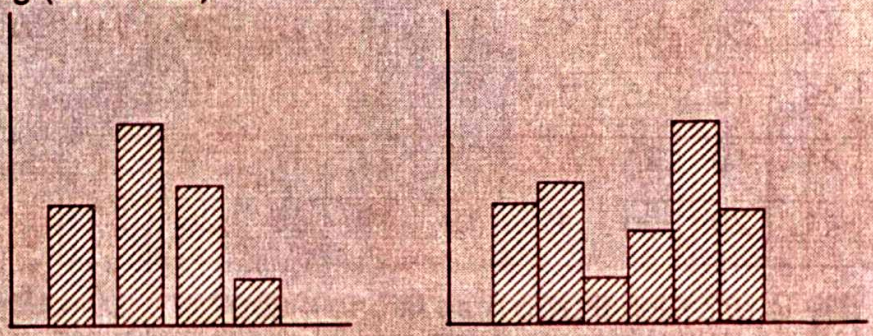
Giá trị	Tần số	Tần suất %
		N

- Bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp:

Thay giá trị bởi các đoạn rời nhau [a, b], [c, d], ... hoặc các nửa khoảrg "liên tiếp" [a, b), [b, c), [c, d),...

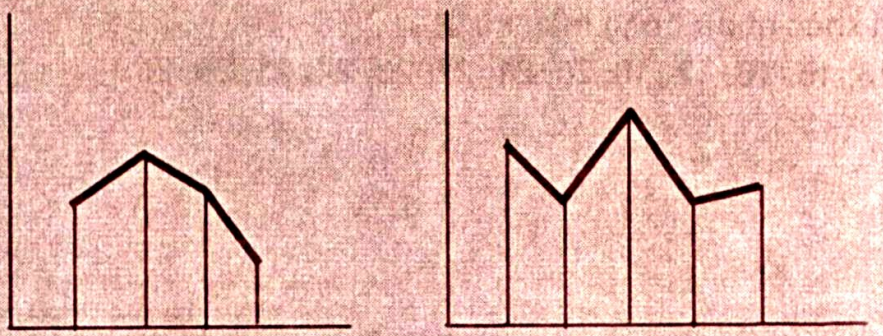
- Biểu đồ tần số, tần suất hình cột:

Chiều cao của cột là tần số, tần suất còn đáy là đoạn (rời nhau hoặc khoảng (liền nhau)

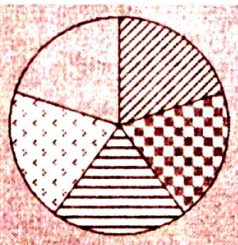


- Đường gấp khúc tần số, tần suất:

Nếu giá trị là lớp thì lấy đại diện là trung điểm.



- Biểu đồ tần suất hình quạt: Chia hình tròn theo số lớp, góc ở tâm bằng 360^o nhân với tần suất



Chú ý:

1) Trong bảng phân bố tần số - tần suất, các giá trị được sắp xếp theo thứ tự tăng dần.
2) Tần suất thường viết dưới dạng phần trăm. Tổng số các giá trị ở hàng (cột) tần suất bằng 100%.
3) Thông thường, trong bảng phân bố tần số ghép lớp, các khoảng (đoạn hoặc nửa khoảng) có độ dài bằng nhau.
4) Khi vẽ biểu đồ tần số, tần suất hình cột, đơn vị trên hai trục có thể chọn khác nhau, chọn khéo thế nào để biểu đồ được đẹp mắt. Giao của hai trục dùng làm điểm gốc cho trục tung và không ghi số 0 ở đó.

B. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Trong một giải bóng đá, người ta tổ chức một cuộc thi dự đoán kết quả của 25 trận đáng chú ý nhất. Sau đây là số phiếu dự đoán đúng của 25 trận mà ban tổ chức nhận được.

54 75 121 142 154 159 171 189 203 211 225 247 151
259 264 278 290 305 315 322 355 367 388 450 490

Hãy lập bảng tần số - tần suất ghép lớp gồm sáu lớp: lớp đầu tiên là đoạn [50; 124], lớp thứ hai là đoạn [125; 199]... (độ dài mỗi đoạn là 74).

Giải

Lớp	Tần số	Tần suất (%)
[50; 124]	3	12
[125; 199]	5	20
[200; 274]	7	28
[275; 349]	5	20
[350; 424]	3	12
[425; 499]	2	8
	N = 25	

Ví dụ 2: Một cuộc điều tra 50 nhà nhiếp ảnh nghiệp dư với câu hỏi: "Trong tháng trước anh (chị) sử dụng hết bao nhiêu cuộn phim? Cho kết quả như sau:

5 3 3 1 4 3 4 3 6 8 4 5 3 4 2 4 7
6 5 9 6 6 7 0 11 3 12 4 7 14 0 2 4
4 3 5 15 0 10 4 5 2 3 5 1 8 1 2 12

a) Dấu hiệu, đơn vị điều tra ở đây là gì?

b) Lập bảng tần số ghép lớp, với lớp đầu tiên là đoạn [0; 2], lớp tiếp theo là đoạn [3; 5], ..., lớp cuối cùng là đoạn [15; 17] (độ dài mỗi đoạn là 2).

c) Vẽ biểu đồ tần số hình cột.

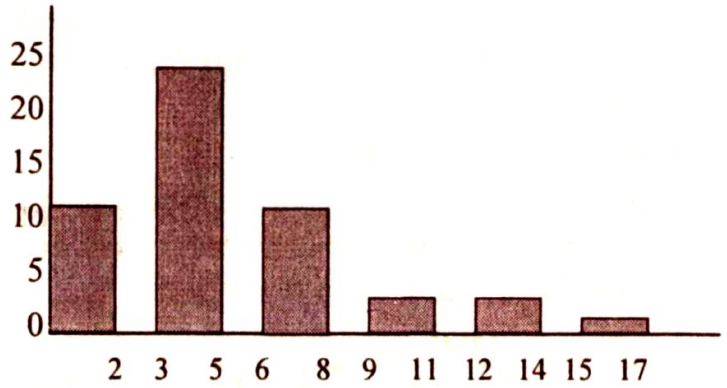
Giải

a) Dấu hiệu: Số cuộn phim mà một nhà nhiếp ảnh dùng trong tháng trước. Đơn vị điều tra: Một nhà nhiếp ảnh nghiệp dư.

b) Bảng phân bố tần số ghép lớp:

Lớp	Tần số
[0; 2]	10
[3; 5]	23
[6; 8]	10
[9; 11]	3
[12; 14]	3
[15; 17]	1
	N = 50

c) Biểu đồ tần số hình cột



Ví dụ 3: Doanh thu của 50 cửa hàng của một Công ty trong một tháng như sau (đơn vị triệu đồng)

120	121	129	114	95	88	109	147	118	148	128	71	93	67	62
57	103	135	97	166	83	114	66	156	88	64	49	101	79	120
75	113	155	48	104	112	79	87	88	141	55	123	152	60	83
144	84	95	90	27										

a) Lập bảng tần số - tần suất ghép lớp gồm bảy lớp: lớp đầu tiên là nửa khoảng [26,5; 48,5), lớp tiếp theo là nửa khoảng [48,5; 70,5), ... (độ dài mỗi nửa khoảng là 22).

b) Vẽ biểu đồ tần số hình cột.

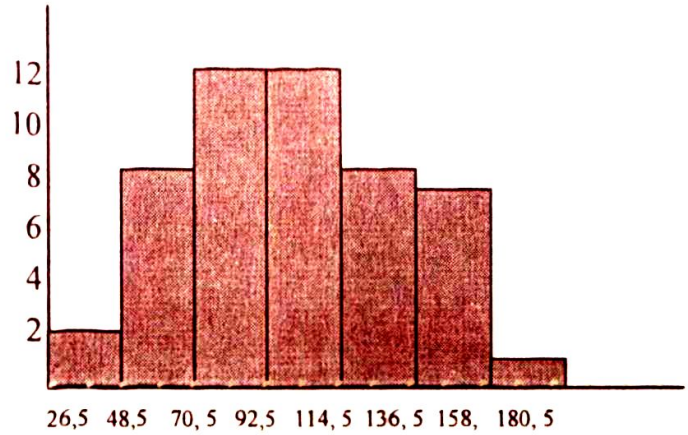
Giải

a) Bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp:

Lớp	Tần số	Tần suất (%)
[26,5; 48,5)	2	4
[48,5; 70,5)	8	16
[70,5; 92,5)	12	24
[92,5;114,5)	12	24
[114,5; 136,5)	8	16
[136,5; 158,5)	7	14
[158,5; 180,5)	1	2
	N = 50	

ABC

b) Vẽ biểu đồ tần số hình cột



Ví dụ 4: Điều tra về số đĩa CD của 80 gia đình, điều tra viên thu được bảng tần số - tần suất sau:

Lớp	Tần số	Tần suất (%)
[1; 10]	5	6,25
[11; 20]	29	...
[21; 30]	21	...
[31; 40]	16	...
[41; 50]	7	...
[51; 60]	2	...
	N = 80	

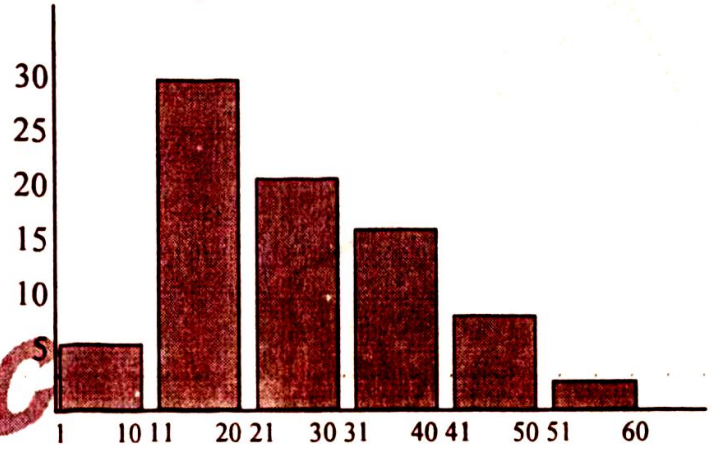
a) Điền các số vào chỗ trống (...) ở cột tần suất.
b) Vẽ biểu đồ tần số hình cột.
c) Vẽ biểu đồ tần suất hình cột
d) Vẽ biểu đồ tần suất hình quạt

Giải

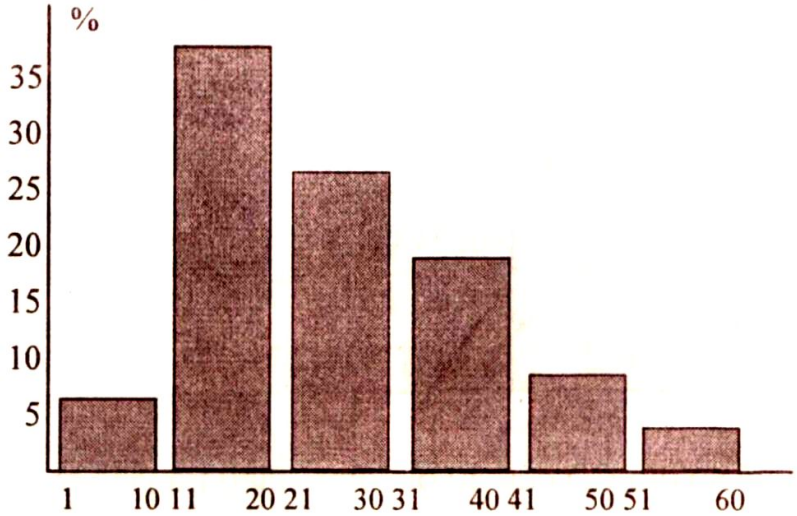
a)

Lớp	Tần số	Tần suất (%)
[1; 10]	5	6,25
[11; 20]	29	36,25
[21; 30]	21	26,25
[31; 40]	16	20,00
[41; 50]	7	8,75
[51; 60]	2	2,50
	N = 80	

b) Biểu đồ tần số hình cột

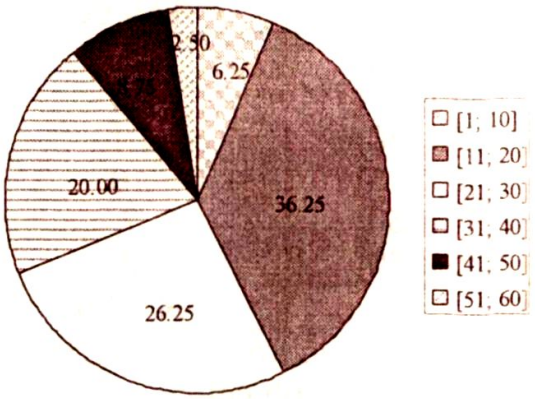


c) Biểu đồ tần suất hình cột



d) Biểu đồ tần suất hình quạt

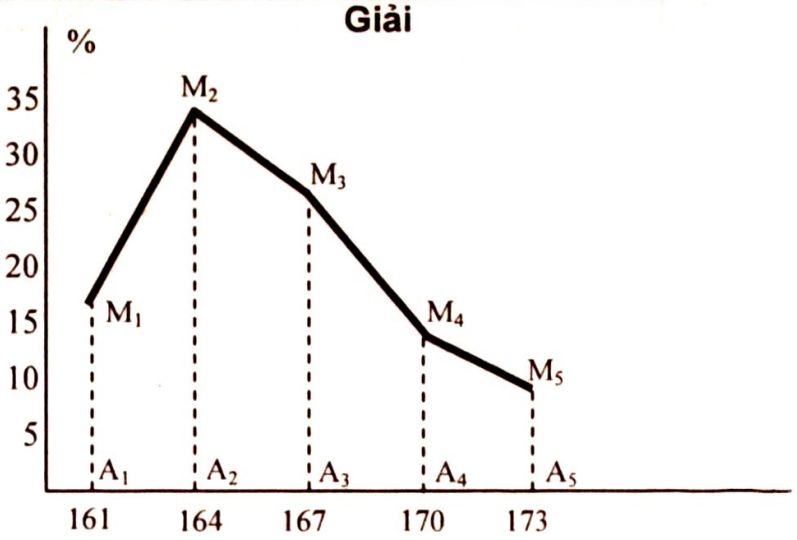
Lớp	Góc ở tâm
[1; 10]	22,5°
[11; 20]	130,5°
[21; 30]	94,5°
[31; 40]	72°
[41; 50]	31,5°
[51; 60]	9°



Ví dụ 5: Vẽ đường gấp khúc tần suất ứng với số liệu ở bảng sau:

Lớp	Tần số	Tần suất (%)
[160, 162]	6	16,7
[163, 165]	12	33,3
[166, 168]	10	27,8
[169, 171]	5	13,9
[172, 174]	3	8,3
	N = 36	

Giải



Ví dụ 6: Thời gian hoàn thành một sản phẩm ở một nhóm công nhân (đơn vị: phút).

42	42	42	42	44	44	44	44	44	45
45	45	45	45	45	45	45	45	45	45
45	45	45	45	45	45	45	45	45	54
54	54	50	50	50	50	48	48	48	48
48	48	48	48	48	48	50	50	50	50

a) Hãy lập bảng phân bố tần số, bảng phân bố tần suất.

b) Trong 50 công nhân được khảo sát, những công nhân có thời gian hoàn thành một sản phẩm từ 45 phút đến 50 phút chiếm bao nhiêu phần trăm?

Giải

a) Bảng phân bố tần số

Thời gian (phút)	42	44	45	48	50	54	
Tần số	4	5	20	10	8	3	N = 50

Bảng phân bố tần suất

Thời gian (phút)	42	44	45	48	50	54
Tần suất (%)	8	10	40	20	16	6

b) Số công nhân có thời gian hoàn thành sản phẩm từ 45 phút đến 50 phút bằng $20 + 10 + 8 = 38$, do đó họ chiếm $\frac{38}{50} = 76\%$.

Cách khác: Theo bảng phân bố tần suất thì số phần trăm cần tính bằng $40 + 20 + 16 = 76\%$.

C. BÀI TẬP

Bài 1: Một trạm kiểm soát giao thông ghi tốc độ (km/h) của 30 chiếc xe ôtô đi qua trạm như sau:

53	47	59	66	36	69	83	77	42	57	51	60	78	63	46
63	42	55	63	48	75	60	58	80	44	59	60	75	49	63

a) Dấu hiệu và đơn vị điều tra?

b) Hãy lập bảng tần số - tần suất ghép lớp (chính xác đến hàng phần nghìn) gồm sáu lớp: lớp đầu tiên là đoạn [36; 43], lớp thứ hai là đoạn [44; 51]... (độ dài mỗi đoạn là 7).

ĐS: b)

Lớp	Tần số	Tần suất (%)
[36; 43]	3	10,0
[44; 51]	6	20,0
[52; 59]	6	20,0
[60; 67]	8	26,7
[68; 75]	3	10,0
[76; 83]	4	13,3
	N = 30	

Bài 2: Một thư viện thống kê số người đến đọc sách vào buổi tối trong 30 ngày của tháng vừa qua như sau:

85	81	65	58	47	30	51	92	85	42	55	37	31	82	63
33	44	93	77	57	44	74	63	67	46	73	52	53	47	35

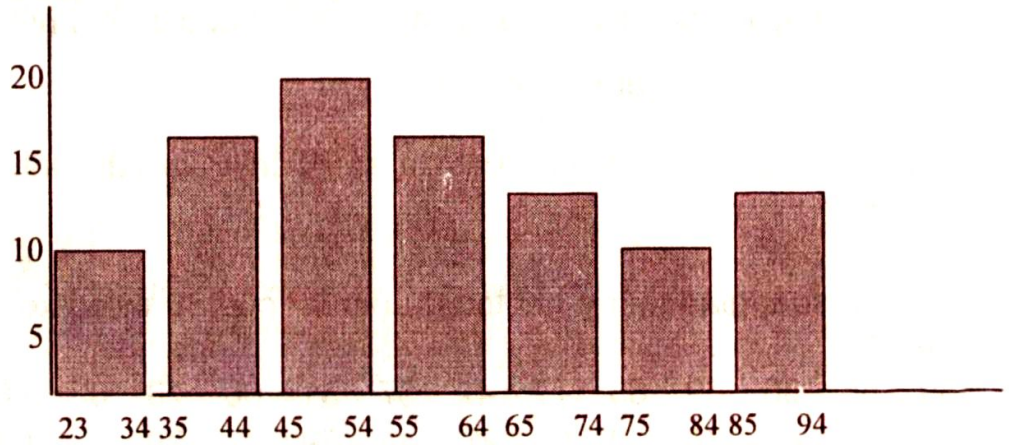
a) Lập bảng tần số - tần suất ghép lớp (chính xác đến hàng phần trăm), với lớp đầu tiên là đoạn [25; 34], lớp tiếp theo là đoạn [35; 44],..., lớp cuối cùng là đoạn [85; 94] (độ dài mỗi đoạn là 9).

b) Vẽ biểu đồ tần suất hình cột.

ĐS: a) Bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp:

Lớp	Tần số	Tần suất (%)
[25; 34]	3	10
[35; 44]	5	17
[45; 54]	6	20
[55; 64]	5	17
[65; 74]	4	13
[75; 84]	3	10
[85; 94]	4	13
	N = 30	

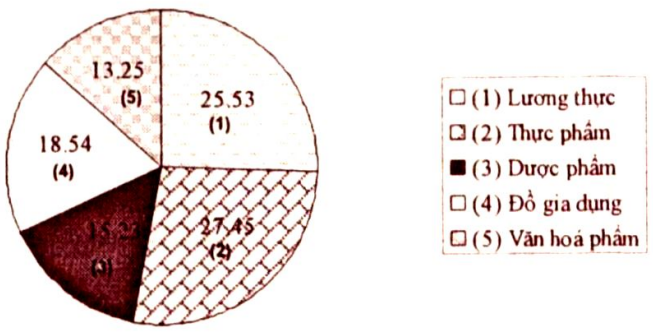
b) Biểu đồ tần suất hình cột



Bài 3: Vẽ biểu đồ tần suất hình quạt của bảng số liệu:

Mặt hàng	Tần suất %
Lương thực	25,53
Thực phẩm	27,45
Dược phẩm	15,23
Đồ gia dụng	18,54
Văn hoá phẩm	13,25

ĐS:

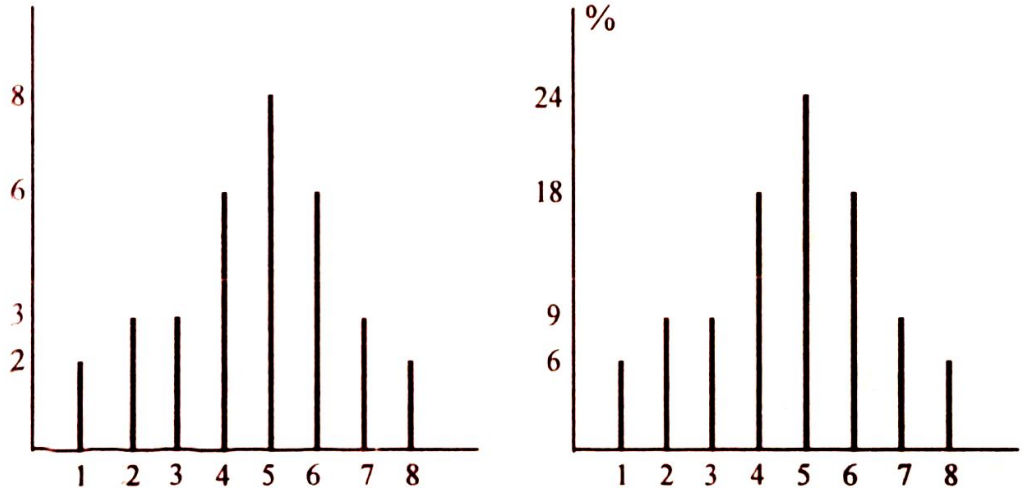


Bài 4: Điểm thi học kỳ I môn Văn của lớp 10A:

Điểm	1	2	3	4	5	6	7	8	
Tần số	2	3	3	6	8	6	3	2	N = 33

a) Lập bảng phân bố tần số ghép lớp.
b) Vẽ biểu đồ tần số, tần suất hình cột.

ĐS: b)



Bài 5: Điểm thi của 45 thủ khoa ngoại ngữ:

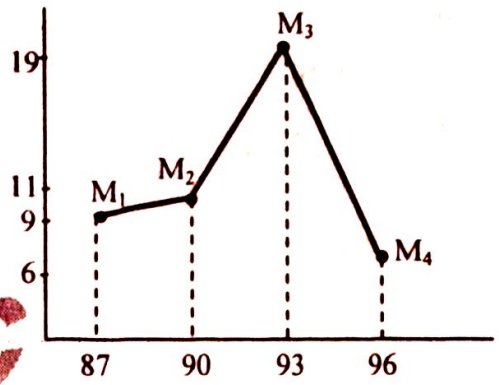
86	86	86	86	87	87	88	88	88	89
89	89	89	90	90	90	90	90	90	91
92	92	92	92	92	92	93	93	93	93
93	93	93	93	93	94	94	94	94	95
96	96	96	97	97					

a) Lập bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp, lớp đầu tiên là đoạn [86, 88], tiếp theo là [89, 91], [92, 94],...
b) Vẽ biểu đồ tần số, tần suất hình cột.
c) Vẽ biểu đồ đường gấp khúc tần số.

ĐS: a)

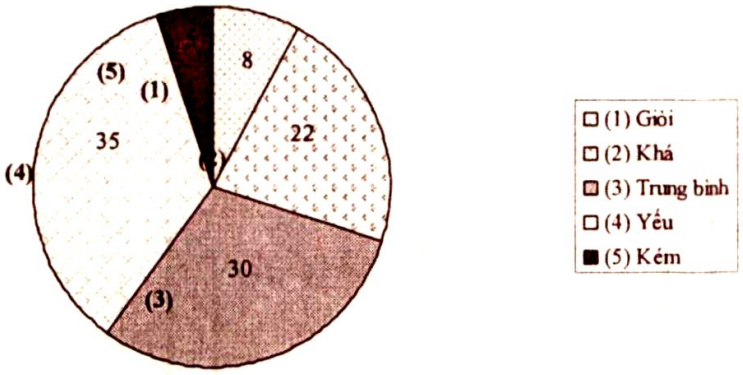
Lớp	Tần số	Tần suất (%)
[86, 88]	9	20
[89, 91]	11	24,44
[92, 94]	19	42,22
[95, 97]	6	13,34
	N = 45	

c)



Bài 6: Học sinh lớp 10A trường phổ thông T được phân loại về trình độ học tập như sau: 8% loại giỏi, 22% loại khá, 30% loại trung bình, 35% loại yếu, 5% loại kém. Hãy biểu diễn tình hình phân loại nói trên bằng biểu đồ hình quạt.

ĐS:



Bài 7: Nhiệt độ trung bình (°C) của tháng 5 ở địa phương A từ năm 1961 đến năm 1990:

27,1	26,9	28,5	27,4	29,1	27,0	27,1	27,4	28,0	28,6
28,1	27,4	27,4	26,5	27,8	28,2	27,6	28,7	27,3	26,8
26,8	26,7	29,0	28,4	28,3	27,4	27,0	27,0	28,3	25,9

a) Lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp, với các lớp sau: [25; 26), [26, 27), [27, 28), [28, 29), [29, 30).

b) Trong 30 năm được khảo sát, những năm có nhiệt độ trung bình của tháng 5 (ở địa phương A) từ 28°C đến 30°C chiếm bao nhiêu phần trăm?

ĐS: b) 36,7%.

§3. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA MẪU SỐ LIỆU

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Số trung bình: $\overline{x}$

Giả sử ta có mẫu số liệu kích thước N: $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$

Số trung bình $\overline{x}$ của mẫu số liệu này được tính bởi công thức:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Nếu giá trị x_i có tần số n_i với i = 1, 2, ..., m thì:

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_mx_m}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i.x_i, \sum_{i=1}^{m} n_i = N$$

Nếu cho bởi các lớp thì đại diện x_i là trung điểm, ta có công thức gần đúng:

$$\overline{x} \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_ix_i$$

- Số trung vị: M_e

Giả sử ta có một mẫu số liệu gồm N số liệu được sắp xếp theo thứ tự không giảm. Nếu N là một số lẻ thì số liệu đứng thứ $\frac{N+1}{2}$ được gọi là số trung vị.

Nếu N là một số chẵn thì số trung bình cộng của hai số liệu đứng thứ $\frac{N}{2}$ và $\frac{N}{2}+1$ được gọi là số trung vị, kí hiệu M_e.

- Mốt: M_o

Giá trị có tần số lớn nhất của một mẫu số liệu được gọi là mốt của mẫu số liệu và kí hiệu là M_o.

Nếu trong bảng phân bố tần số có nhiều giá trị có tần số bằng nhau và lớn hơn tần số của các giá trị khác thì các giá trị đó là mốt.

- Phương sai và độ lệch chuẩn:

Phương sai của mẫu số liệu, kí hiệu là s^2, được tính bởi công thức sau:

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$

trong đó $\bar{x}$ là số trung bình của mẫu số liệu: $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$

Căn bậc hai số học của phương sai được gọi là độ lệch chuẩn, kí hiệu là s:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Ta có thể tính phương sai theo công thức "trung bình của bình phương trừ bình phương của trung bình".

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{N}x_i\right)^2$$

Nếu cho bởi bảng tần số hoặc ghép lớp thì:

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m}n_i x_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{m}n_i x_i\right)^2 \text{ hoặc } s^2 \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m}n_i x_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{m}n_i x_i\right)^2$$

• Ý nghĩa:

- Phương sai là số đo mức độ phân tán của các giá trị trong mẫu số liệu quanh số trung bình. Nhìn vào công thức tính phương sai ta thấy nó là trung bình cộng của tổng bình phương các khoảng cách từ mỗi số liệu tới số trung bình. Vì thế, người ta còn gọi phương sai là độ lệch bình phương trung bình. Khi số liệu có đơn vị thì đơn vị của phương sai là bình phương đơn vị của số liệu.

Khi hai dãy số liệu thống kê có cùng đơn vị đo và có số trung bình bằng nhau hoặc xấp xỉ nhau, dãy có phương sai càng nhỏ thì mức độ phân tán (so với số trung bình) của các số liệu thống kê càng ít.

- Độ lệch chuẩn là căn bậc hai của phương sai. Do đó, nó cũng là một số đo mức độ phân tán các giá trị trong mẫu số liệu quanh số trung bình. Khi số liệu có đơn vị thì độ lệch chuẩn có cùng đơn vị đo với đơn vị của số liệu.

B. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Có 100 học sinh tham dự kì thi học sinh giỏi Toán (thang điểm là 20). Kết quả được cho trong bảng sau đây:

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2	N = 100

a) Tính số trung bình

b) Tính số trung vị và mốt. Nêu ý nghĩa của chúng.

c) Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Giải

a) $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i = \frac{1}{100}$ (9.1 + 10.1 + 11.3 + 12.5 + 13.8

+ 14.14 + 15.19 + 16.24 + 17.14 18.10 + 19.2) = 15,23

b) N = 100 chẵn, số liệu đứng thứ năm mươi là 15, số liệu đứng thứ năm mươi một là 16 nên $M_e = \frac{15+16}{2} = 15,5$.

Tần số lớn nhất là 24 nên mốt $M_o = 16$

Như vậy, có khoảng một nửa số học sinh có điểm dưới 15,5 và số học sinh đạt 16 điểm là nhiều nhất.

c) Phương sai : $s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})^2 \approx 3,96$

Độ lệch chuẩn: $s \approx 1,99$

Ví dụ 2: Người ta chia 179 củ khoai tây thành chín lớp căn cứ trên khối lượng của chúng (đơn vị là gam). Ta có bảng phân bố tần số ghép lớp sau đây:

Lớp	Tần số
[10; 19]	1
[20; 29]	14
[30; 39]	21
[40; 49]	73
[50; 59]	42
[60; 69]	13
[70; 79]	9
[80; 89]	4
[90; 99]	2
	N = 179

Giải

Tính khối lượng trung bình của một củ khoai tây. Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

Lớp	Giá trị đại diện	Tần số
[10; 19]	14,5	1
[20; 29]	24,5	14
[30; 39]	34,5	21
[40; 49]	44,5	73
[50; 59]	54,5	42
[60; 69]	64,5	13
[70; 79]	74,5	9
[80; 89]	84,5	4
[90; 99]	94,5	2
		N = 179

Từ đó, khối lượng trung bình của một củ khoai tây là:

$$\overline{x} \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i \approx 48{,}35 \text{ (g)}$$

Phương sai : $s^2 \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2 \approx 194{,}64$

Độ lệch chuẩn : $s \approx 13{,}95$ (g).

Ví dụ 3: Số liệu sau đây cho ta lãi (quy tròn) hàng tháng của một cửa hàng trong năm 2005. Đơn vị là triệu đồng.

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lãi	12	15	18	13	13	16	18	14	15	17	20	17

a) Tìm số trung bình, số trung vị.

b) Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

Giải

a) Số trung bình : $\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i \approx 15{,}67$ (triệu đồng)

Để tìm số trung vị, ta xếp số liệu theo thứ tự không giảm: 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

Vì N = 12 nên $M_e = \frac{15+16}{2} = 15{,}5$ (triệu đồng)

b) Phương sai: $s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{m} n_i x_i\right)^2 \approx 5{,}39.$

Độ lệch chuẩn: $s \approx 2{,}32$ (triệu đồng).

Ví dụ 4: Người ta phân 400 quả trứng thành năm lớp căn cứ trên khối lượng của chúng (đơn vị là gam). Ta có bảng phân bố tần số ghép lớp sau đây:

Lớp	Tần số
[27,5, 32,5)	18
[32,5, 37,5)	76
[37,5, 42,5)	200
[42,5, 47,5)	100
[47,5, 52,5)	6
	N = 400

a) Tính số trung bình.

b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Giải

Từ giả thiết ta có bảng sau:

Lớp	Giá trị đại diện	Tần số
[27,5, 32,5)	30	18
[32,5, 37,5)	35	76
[37,5, 42,5)	40	200
[42,5, 47,5)	45	100
[47,5, 52,5)	50	6
		N = 400

a) Số trung bình : $\overline{x} \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i \approx 40$ (g)

b) Phương sai: $s^2 \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i^2 - (\overline{x})^2 \approx 17$

Độ lệch chuẩn $s \approx 4,12$(g).

Ví dụ 5: Trên hai con đường A và B, trạm kiểm soát đã ghi lại tốc độ (km/h) của 30 chiếc ôtô trên mỗi con đường như sau:

Con đường A:

60 65 70 68 62 75 80 83 82 69 73 75 85 72 67
88 90 85 72 63 75 76 85 84 70 61 60 65 73 76

Con đường B:

76 64 58 82 72 70 68 75 63 67 74 70 79
80 73 75 71 68 72 73 79 80 63 62 71 70
74 69 60 63

a) Tìm số trung bình, số trung vị, phương sai và độ lệch chuẩn của tốc độ ôtô trên mỗi con đường A, B.

b) Xe chạy trên con đường nào an toàn hơn?

Giải

a) Áp dụng công thức tính $\overline{x}$, M_e, s^2 ta có:

Trên con đường A: $\overline{x} \approx 73,63$km/h, $M_e = 73$km/h

$s^2 \approx 74,77$; $s \approx 8,65$ km/h.

Trên con đường B: $\overline{x} = 70,7$km/h, $M_e = 71$km/h

$s^2 \approx 38,21$; $s \approx 6,18$km/h.

b) Nói chung, lái xe trên con đường B an toàn hơn trên con đường A vì vận tốc trung bình của ôtô trên con đường B nhỏ hơn trên con đường A và độ lệch chuẩn của ôtô trên con đường B cũng nhỏ hơn trên con đường A.

Ví dụ 6: Điểm thi Toán của 2 lớp 10A và 10B lần lượt như sau:

10A:	8	9	10	9	9	10	8	7	6	8
	10	7	10	9	8	10	8	9	8	6
	10	9	7	9	9	9	6	8	6	8
10B:	9	9	10	6	9	10	8	8	5	9
	9	10	6	10	7	8	10	9	10	9
	9	10	7	7	8	9	8	7	8	8

Tính trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn của điểm mỗi lớp. Lớp nào có điểm số đều hơn?.

Giải

Lớp 10A có: $\overline{x} \approx 8,3$ điểm; $s_x^2 \approx 1,6$; $s_x \approx 1,27$ điểm

Lớp 10B có: $\overline{y} = 8,4$ điểm, $s_y^2 \approx 1,77$; $s_y \approx 1,33$ điểm.

Vì $\overline{x} \approx \overline{y} = 8,4$ điểm; $s_y^2 > s_x^2$, như vậy mức độ phân tán của các điểm số (so với số trung bình) của lớp 10A là bé hơn. Vì vậy, trong lần thi này lớp 10A có kết quả đều hơn lớp 10B.

Ví dụ 7: Người ta tiến hành phỏng vấn một số người về chất lượng của một loại sản phẩm mới. Người điều tra yêu cầu cho điểm sản phẩm (thang điểm 100) kết quả như sau:

80	65	51	48	45	61	30	35	84	83
60	58	75	72	68	39	41	54	61	72
75	72	61	50	65					

a) Tìm số trung bình, trung vị và mốt.

b) Tìm phương sai và độ lệch chuẩn. Nhận xét gì về các kết quả nhận được.

Giải

Lập lại bảng theo số điểm tăng dần

Điểm	30	35	39	41	45	48	50	51	54	58	60	61	65	68	72	75	80	83	87
Tần số	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3	2	1	3	2	1	1	1

a) Số trung bình: $\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i = 60,2$

Vì N = 25 lẻ nên trung vị $M_e = x_{13} = 61$

Vì bảng trên có 2 số có tần số lớn nhất nên có hai mốt là 61, 72.

Phương sai: $s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2 = 216,8$

Độ lệch chuẩn $s = \sqrt{s^2} \approx 14,724$

Nhận xét là mức độ chênh lệch giữa các giá trị điểm là khá lớn.

C. BÀI TẬP

Bài 1: Bảng sau đây trích từ sổ theo dõi bán hàng của một cửa hàng bán xe máy.

Số xe bán trong ngày	0	1	2	3	4	5
Tần số	2	13	15	12	7	3

a) Tìm số xe trung bình bán được trong một ngày.

b) Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

ĐS: a) $\overline{x} \approx 2,35$ b) $s^2 \approx 1,57$; $s \approx 1,25$

Bài 2: Một cửa hàng bán xe hơi thống kê số xe bán ra trong 23 ngày, cuối năm 2005. Kết quả như sau:

47 54 43 50 61 36 65 54 50 43 62 59 36 45 45 33 53 67 21 45 50 36 58

a) Tìm số trung bình, số trung vị.

b) Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

ĐS: a) $\overline{x} \approx 48,39$; $M_e = 50$ b) $s^2 \approx 121,98$; $s \approx 11,04$

Bài 3: Số lượng latop bán ra trong mỗi tháng được thống kê trong bảng sau đây:

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số máy	430	560	450	550	760	430	525	110	635	450	800	950

a) Tìm số trung bình, số trung vị.

b) Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

ĐS: a) Sắp xếp số liệu không giảm khi tìm trung vị, chú ý N = 12.

Bài 4: Một người lái xe thường xuyên đi lại giữa hai địa điểm A và B. Thời gian đi (tính bằng phút) được ghi lại trong bảng phân bố tần số ghép lớp sau đây:

Lớp	Tần số
[40; 44]	9
[45; 49]	15
[50; 54]	30
[55; 59]	17
[60; 64]	17
[65; 69]	12
	N = 100

a) Tính thời gian trung bình mà người đó đi từ A đến B.

b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

ĐS: a) Thời gian trung bình mà người đó đi từ A đến B xấp xỉ là 54,7 phút.

b) $s^2 \approx 53,71$; $s \approx 7,33$ phút.

Bài 5: Người ta tiến hành phỏng vấn một số người về một bộ phim mới chiếu trên truyền hình. Người điều tra yêu cầu cho điểm bộ phim (thang điểm là 100). Kết quả được trình bày trong bảng phân bố tần số ghép lớp sau đây:

Lớp	Tần số
[50, 60)	2
[60, 70)	6
[70, 80)	10
[80, 90)	8
[90, 100)	4
	N = 30

a) Tính số trung bình

b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

HD:

Lớp	Giá trị đại diện	Tần số
[50; 60)	55	2
[60; 70)	65	6
[70; 80)	75	10
[80; 90)	85	8
[90; 100)	95	4
		N = 30

Bài 6: Một nhà nghiên cứu ghi lại tuổi của 30 bệnh nhân. Kết quả thu được mẫu số liệu như sau:

21 17 22 18 20 17 15 13 15 20 15 12 18 17 25 17 21 15
12 18 16 23 14 18 19 13 16 19 18 17

a) Lập bảng phân bố tần số.

b) Tính số trung bình và độ lệch chuẩn.

c) Tính số trung vị và mốt.

ĐS: a)

Tuổi	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	25	
Tần số	2	2	1	4	2	5	5	2	2	2	1	1	1	N = 30

b) $\bar{x} \approx 17,37$; $s \approx 3,12$

c) $M_e = 17$. Có hai mốt là $M_o = 17$ và $M_o = 18$.

Bài 7: Người ta điều tra sản phẩm của hai tổ đóng gói các túi cà phê (có khối lượng quy định là 2kg). Kết quả điều tra cho các số liệu thống kê ghi ở hai bảng sau:

Tổ A	1,95	2,09	1,91	1,99	1,93	2,07	2,15	1,96	1,93	1,94
	1,94	2,05	2,02	1,97	1,91	1,95	2,05	2,04	2,03	2,00
	2,02	1,94	1,92	1,97	2,00	2,02	2,04	2,05	2,02	2,02
	1,94	2,01	1,99	1,95	2,03	2,06	1,91	2,14	1,90	2,25
Tổ B	1,77	1,79	1,80	1,69	1,76	1,69	1,69	1,93	1,94	1,98
	2,07	1,98	1,96	1,97	2,06	1,96	1,96	1,91	1,93	2,06
	1,97	2,07	2,06	2,08	1,91	1,95	2,05	1,93	1,94	2,02
	2,22	2,31	1,80	2,30	2,30	2,23	2,31	2,25	2,24	2,23

Tính số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn của các số liệu thống kê. Từ đó, xét xem trong lần điều tra này, sản phẩm của tổ nào có khối lượng đồng đều hơn?

ĐS: Tổ A: có $\bar{x} \approx 2$kg, $s_x^2 \approx 0,006$; $s_x = 0,08$kg

Tổ B: có $\bar{y} \approx 2$kg, $s_y^2 \approx 0,04$, $s_y \approx 0,19$kg

Sản phẩm của tổ A có khối lượng đồng đều hơn.

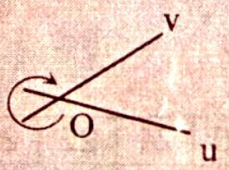
Chương 6: GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

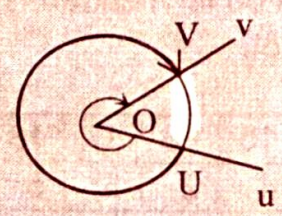
§1. GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

– Cung tròn bán kính R, có độ dài l, có số đo radian là α $(0 \le \alpha \le 2\pi)$, có số đo a^o $(0 \le a \le 360)$ thì: $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{a}{180}$, $l = R\alpha$

– Mỗi góc lượng giác gốc O được xác định bởi tia đầu Ou, tia cuối Ov và số đo độ hay radian của nó.





– Cung lượng giác $\overset{\frown}{UV}$ được xác định bởi mút đầu, mút cuối và số đo của nó trên đường tròn định hướng. Chiều quay dương là ngược chiều quay kim đồng hồ.

– Nếu một góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo α radian thì mọi góc lượng giác cùng tia đầu Ou, tia cuối Ov có số đo $\alpha + 2k\pi$, $k \neq Z$, mỗi góc tương ứng với một giá trị của k. Các cung lượng giác $\overset{\frown}{UV}$ tương ứng trên đường tròn định hướng tâm O cũng có tính chất như vậy. Tương tự cho đơn vị độ.

– Hệ thức Sa–lơ: Với ba tia tuỳ ý Ou, Ov, Ow, ta có:

sđ(Ou, Ov) + sđ(Ov, Ow) = sđ(Ou, Ow) + $2k\pi$ $(k \in Z)$

B. PHÂN DẠNG TOÁN

DẠNG 1: ĐƠN VỊ VÀ ĐỘ DÀI CUNG

– Một cung có số đo α radian hoặc a độ thì có:

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{a}{180} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi a}{180}, a = \frac{\alpha.180}{\pi}$$

$$1^o = \frac{\pi}{180} \text{ rad}, 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^o$$

Với $\pi \approx 3,14$ thì $1^o \approx 0,0175$ rad và ngược lại, 1 rad $\approx 57^o17'45''$

– Trên đường tròn (O; R), một cung có số đo α rad thì có độ dài $l = \alpha R$

Ví dụ 1: Đổi số đo độ của các cung tròn: $21^\circ 30'$ và $75^\circ 54'$ thành số đo radian.

Giải

$21^\circ 30' = \frac{21,5.\pi}{180} \approx 0,375$ (rad); $75^\circ 54' = \frac{75,9.\pi}{180} \approx 1,325$ (rad)

Ví dụ 2: Đổi số đo radian của các cung tròn: 2,5 rad và $\frac{2}{\pi}$ rad thành số đo độ, chính xác đến phút.

Giải

$2,5 \text{ rad} = \left(\frac{2,5.180}{\pi}\right)^\circ \approx 143^\circ 14'$,

$\frac{2}{\pi} \text{ rad} = \left(\frac{\frac{2}{\pi}.180}{\pi}\right)^\circ \approx \left(\frac{360}{\pi^2}\right)^\circ \approx 36^\circ 29'$

Ví dụ 3: Điền vào ô trống của bảng:

Số đo độ	-60°	-240°			3100°	
Số đo radian			$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{16\pi}{3}$		$\frac{68\pi}{5}$

Giải

Dùng quan hệ: $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{a}{180}$ ta có:

Số đo độ	-60°	-240°	-135°	-960°	3100°	2448°
Số đo radian	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{16\pi}{3}$	$\frac{155\pi}{9}$	$\frac{68\pi}{5}$

Ví dụ 4: Bánh xe của người đi xe đạp quay được 11 vòng trong 5 giây.

a) Tính góc (theo độ và radian) mà bánh xe quay được trong 1 giây.

b) Tính độ dài quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính bánh xe đạp là 680 mm.

Giải

a) Trong 1 phút, bánh xe quay được $\frac{11}{5}$ vòng, tức là quay được một góc $\frac{22\pi}{5}$ (rad) hay 792°.

b) Trong 1" bánh xe lăn được:

$$l = 340.\frac{22\pi}{5}.60 \approx 281,990 \text{ (mm)} \approx 282 \text{ (m)}$$

Ví dụ 5: Một đường tròn có bán kính 15 cm. Tìm độ dài các cung trên đường tròn đó có số đo: a) $\frac{\pi}{6}$ b) 25°

Giải

a) $l = \pi R = \frac{\pi}{6}.15 \approx 2,94$ cm

b) $\alpha = 25^\circ \approx 0,4363$ rad. Độ dài cung 25° trên đường tròn bán kính 15 cm là:

$l = 15.0,4363 \approx 6,55$ cm.

Ví dụ 6: Kim phút và kim giờ theo thứ tự dài 1,75 m và 1,26 m. Hỏi trong 15 phút, kim phút và kim giờ vạch trên cung tròn dài bao nhiêu?

Giải

Trong 15 phút, mũi kim phút vạch cung tròn có số đo $\frac{\pi}{2}$ rad nên cung đó có độ dài $\frac{\pi}{2}.1,75 \approx 2,75$ (m) và mũi kim giờ vạch cung tròn có số đo $\frac{\pi}{24}$ rad nên cung đó có độ dài $\frac{\pi}{24}.1,26 \approx 0,16$ (m).

DẠNG 2: CUNG GÓC LƯỢNG GIÁC

– Số đo góc lượng giác:

sđ(Ou, Ov) = $\alpha + k2\pi$ hoặc $a^\circ + k360^\circ$ với k là số nguyên

– Số đo cung lượng giác: Sđ $\overset{\frown}{UV} = \alpha + k2\pi$ hoặc $a^\circ + k360^\circ$

° Để xác định công thức số đo tổng quát thì ta chỉ cần xác định số đo của một cung góc lượng giác của nó. Mỗi cung lượng giác $\overset{\frown}{UV}$ ứng với một góc lượng giác (Ou, Ov) và ngược lại. Số đo của cung lượng giác và góc lượng giác tương ứng là bằng nhau.

Chú ý:

– Hệ thức Salơ của cung lượng giác tương tự với hệ thức Salơ của góc lượng giác tương ứng.

– Hai góc lượng giác (Ox, Oy), (Ox, Oz) có cùng tia đầu Ox, điều kiện có cùng tia cuối là sđ(Oy, Oz) = $k2\pi$ hoặc $k360^\circ$, k nguyên.

– Khi $0 \le \alpha < 2\pi$ thì α là số đo radian của cung lượng giác tạo bởi điểm M di động trên đường tròn định hướng tâm O, theo chiều dương từ điểm U đến gặp điểm V lần đầu tiên; α cũng là số đo radian của cung tròn $\overset{\frown}{UV}$ đó.

– Khi $-\pi < \alpha \le \pi$ thì $|\alpha|$ là số đo radian của góc hình học uOv.

Ví dụ 1: Coi kim đồng hồ là tia Ou, kim phút là tia Ov. Tìm số đo các góc lượng giác (Ou, Ov) khi đồng hồ chỉ 3 giờ, 4 giờ, 9 giờ, 10 giờ.

Giải

Kim đồng hồ chỉ 3 giờ thì sđ(Ou, Ov) = $\frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Kim đồng hồ chỉ 4 giờ thì sđ(Ou, Ov) = $\frac{2\pi}{3} + k2\pi$.

Kim đồng hồ chỉ 9 giờ thì sđ(Ou, Ov) = $-\frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Kim đồng hồ chỉ 10 giờ thì sđ(Ou, Ov) = $-\frac{\pi}{3} + k2\pi$. ($k \in \mathbf{Z}$)

Ví dụ 2: Cho ngũ giác đều $A_0A_1A_2A_3A_4$ nội tiếp trong đường tròn tâm O, các đỉnh xếp theo hướng quay dương. Tính số đo bằng độ và radian của các cung lượng giác $\overset{\frown}{A_0A_i}$, $\overset{\frown}{A_iA_j}$ với i, j = 0, 1, 2, 3, 4 và $i \neq j$.

Giải

Các bán kính của ngũ giác đều chia đường tròn thành 5 góc có số đo góc ở tâm: $\frac{306^\circ}{5} = 72^\circ$ hoặc $\frac{2\pi}{5}$ rad.

Do đó: sđ $\overset{\frown}{A_0A_i} = i\frac{2\pi}{5} + k2\pi$ hay $i.72^\circ + k360^\circ$ với mọi i = 0, 1, 2, 3, 4 ; $k \in \mathbf{Z}$.

Theo hệ thức Salơ:

sđ $\overset{\frown}{A_iA_j}$ = sđ $\overset{\frown}{A_0A_j}$ – sđ $\overset{\frown}{A_0A_i} + k2\pi = (j - i)\frac{2\pi}{5} + k2\pi$

hay $(j - i).72^\circ + k360^\circ$ ($i, j = 0, 1, 2, 3, 4, i \neq j, k \in \mathbf{Z}$)

Ví dụ 3: Chứng minh nếu hai tia Ou, Ov đối nhau thì:

sđ(Ou, Ov) = $(2k + 1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Giải

Vì hai tia Ou, Ov đối nhau nên

sđ(Ou, Ov) = $\pi + k2\pi = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ví dụ 4: Cho hai tia Ou, Ov. Chứng minh:

$Ou \perp Ov \Leftrightarrow$ sđ(Ou, Ov) = $(2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Giải

Ta có Ou, Ov vuông góc khi và chỉ khi sđ(Ou, Ov) = $\frac{\pi}{2} + l2\pi$ ($l \in \mathbf{Z}$) hoặc sđ(Ou, Ov)

$= -\frac{\pi}{2} + m2\pi = \frac{\pi}{2} + (2m - 1)\pi$ ($m \in \mathbf{Z}$)

Viết chung lại là sđ(Ou, Ov) = $\frac{\pi}{2} + k\pi = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ví dụ 5: Cho hai góc lượng giác có cùng tia đầu. Chứng minh chúng có cùng tia cuối, biết số đo là:

a) $\frac{10\pi}{3}$ và $\frac{22\pi}{3}$ b) 645° và -435°

Giải

Hai góc lượng giác có cùng tia đầu, nếu hiệu số đo hai góc lượng giác là $k2\pi$ hoặc $k360^\circ$, với k nguyên thì chúng có cùng tia cuối (hơn khác nhau số vòng)

a) Ta có: $\frac{10\pi}{3} - \frac{22\pi}{3} = 4\pi = 2x2\pi \Rightarrow$ đpcm.

b) Ta có: $645^\circ - (-435^\circ) = 1080^\circ = 3 \times 360^\circ \Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 6: Hai góc lượng giác có số đo $\frac{35\pi}{3}$ và $\frac{m\pi}{5}$ (m nguyên) có thể có cùng tia đầu và tia cuối không?

Giải

Giả sử 2 góc lượng giác đó có cùng tia đầu và tia cuối thì:

$\frac{35\pi}{3} - \frac{m\pi}{5} = k2\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) $\Rightarrow 35.5 = 3m + 30k$, vế phải chia hết cho 3, vế trái không chia hết cho 3: vô lí.

Vậy hai góc lượng giác đó không thể có cùng tia đầu và tia cuối.

Ví dụ 7: Biểu diễn các góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo:

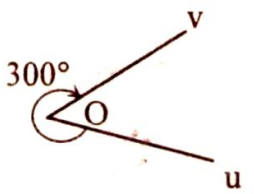
a) $300^\circ + k360^\circ$ b) $-\frac{\pi}{2} + k2\pi$, k nguyên

Giải

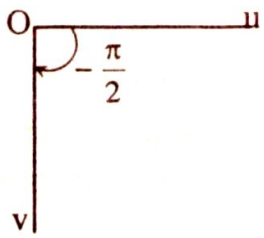
Có vô số góc lượng giác có Ou là tia đầu, Ov là tia cuối.

Khi k = 0 ta có biểu diễn

a)



b)



Ví dụ 8: Tìm góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo dương nhỏ nhất, biết một góc lượng giác đó có số đo:

a) -90°; 1000° b) $\frac{30\pi}{7}$; $-\frac{15\pi}{11}$

Giải

a) Nếu một góc lượng giác có số đo a° thì cần xác định số nguyên k để $0 < a + k360^\circ \leq 360^\circ$, khi đó $a + k360^\circ$ là số dương nhỏ nhất cần tìm.

Với $a = -90^\circ$ thì k = 1, số dương nhỏ nhất cần tìm là 270.

Với $a = 1000^\circ$ thì k = –2, số dương nhỏ nhất cần tìm là 280.

b) Nếu một góc lượng giác có số đo α thì cần xác định số nguyên k để $0 < \alpha + k2\pi \leq 2\pi$, khi đó, $\alpha + k2\pi$ là số dương nhỏ nhất cần tìm.

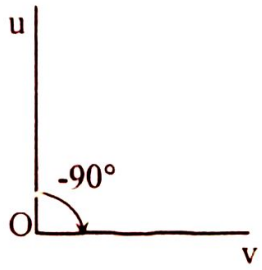
Với $\alpha = \frac{30\pi}{7}$ thì k = –2, số dương nhỏ nhất cần tìm là $\frac{2\pi}{7}$

Với $\alpha = -\frac{15\pi}{11}$ thì k = 1, số dương nhỏ nhất cần tìm là $\frac{7\pi}{11}$.

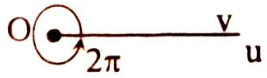
Cách khác: Biểu diễn góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo cho sẵn từ đó suy ra góc có số đo dương nhỏ nhất: quay tia đầu Ou theo chiều dương đến trùng Ov lần đầu tiên.

Ví dụ 9: Tìm góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo dương nhỏ nhất của các góc lượng giác có hình vẽ sau:

a)



b)



Giải

Làm như cách sau của ví dụ 8 thì kết quả:

a) 270° b) 2π

Ví dụ 10: Tìm số đo a° với $-180 < a \leq 180$ của góc lượng giác có số đo sau với k nguyên

a) $-180^\circ + k360^\circ$ b) $-120^\circ + k360^\circ$

c) $300^\circ + k360^\circ$ d) $-420^\circ + k360^\circ$

Giải

a) Xét $-180 < -180 + k360^\circ \leq 180 \Leftrightarrow 0 < k360^\circ \leq 360$

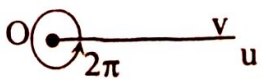
Vì k nguyên nên k = 1, do đó góc cần tìm là 180°

Giải tương tự thì

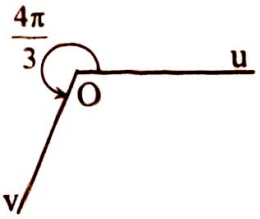
b) k = 0, góc -120° c) k = –1, góc -60°. d) k = 1, góc -60°.

Ví dụ 11: Tìm số đo radian α, $-\pi < \alpha \leq \pi$ của góc lượng giác có hình vẽ sau:

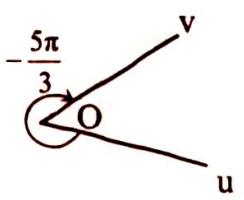
a)



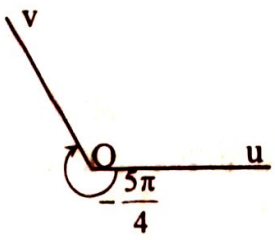
b)



c)



d)



Giải

Theo hình vẽ và điều kiện $-\pi < \alpha \leq \pi$ nên góc cần tìm:

a) 0 b) $-\frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{3}$ d) $\frac{3\pi}{4}$

Ví dụ 12: Kim giờ và kim phút bắt đầu chạy từ vị trí tia Ox chỉ số 12 (0 giờ). Sau t giờ, kim giờ đến vị trí tia Ou, kim phút đến vị trí tia Ov. Chứng minh:

a) Hai tia Ou và Ov trùng nhau khi và chỉ khi $t = \frac{12k}{11}$, $k \in \mathbf{N}$. Hai kim trùng nhau lần đầu tiên sau bao lâu?

b) Trong vòng 12 giờ, hai tia Ou, Ov đối nhau khi và chỉ khi $t = \frac{6}{11}(2k + 1)$, $k = 0, 1, ..., 10$.

Giải

Trong một giờ, kim phút quét góc lượng giác có số đo -2π, kim giờ quét góc lượng giác có số đo $-\frac{2\pi}{12}$, nên trong t giờ, kim phút quét góc lượng giác (Ox, Ov) có số đo $-2\pi t$, kim giờ quét góc lượng giác (Ox, Ou) có số đo $-\frac{\pi}{6}t$. Theo hệ thức Salơ:

sđ(Ou, Ov) = sđ(Ox, Ov) – sđ(Ox, Ou) + $n2\pi$ $(n \in \mathbf{Z})$

$$= -2\pi t + \frac{\pi}{6}t + 2n\pi = \left(-\frac{11}{6}t + 2n\right)\pi$$

a) Hai tia Ou và Ov trùng nhau khi và chỉ khi: (Ou, Ov) = $2m\pi$ $(m \in \mathbf{Z})$ nên:

$$-\frac{11t}{6} + 2n = 2m \Leftrightarrow \frac{11t}{6} = 2(n - m) \Leftrightarrow t = \frac{12k}{11},\ k \in \mathbf{Z},$$ vì $t \geq 0$ nên $k \in \mathbf{N}$.

Do đó hai kim trùng nhau lần đầu tiên sau $\frac{12}{11}$ giờ $\approx$ 1 giờ 5'27"

b) Hai tia Ou, Ov đối nhau khi và chỉ khi (Ou, Ov) = $(2m - 1)\pi$ $(m \in \mathbf{Z})$ nên:

$$-\frac{11t}{6} + 2n = 2m - 1 \Leftrightarrow \frac{11t}{6} = 2(n - m) + 1 \Leftrightarrow t = \frac{6}{11}(2k + 1),\ k \in \mathbf{Z},$$

vì $0 \leq t \leq 12$ nên $k = 0, 1, 2, ..., 10$.

C. BÀI LUYỆN TẬP

1. Đổi qua radian, chính xác đến hàng phần nghìn:

a) $52^0 35'$ b) $142^0 15'$ c) $178^0 52'$ d) $1405^0 20'$

HD: dùng công thức $\alpha . 180 = a . \pi$

2. Đổi qua độ, chính xác đến giây:

a) $\frac{5}{\pi}$ b) $\frac{3\pi}{7}$ c) 5,8rad d) $\frac{151\pi}{8}$ rad

HD: dùng công thức $a . \pi = \alpha . 180$ và tính ra phút, giây

3. Đổi qua đơn vị khác:

a) $11\pi/6$; $-3\pi/7$; 4,8. b) 405^0; -70^0; $230^0 14'$

4. Cho đường tròn có R = 5cm.Tính:

a) Diện tích và chu vi. b) Độ dài cung có số đo $\frac{\pi}{16}$; 37^0 ; 1.

5. Cho 2 đường tròn đồng tâm r = 5cm; R = 9cm.Tính số đo bằng radian của 2 cung trên 2 đường tròn có cùng độ dài 10 cm.

6. Cho lục giác đều ABCDEF tâm O. Lập công thức tổng quát sđ(OA, OB); sđ(OC, OF); sđ(OE, OD).

7. Cho bát giác đều ABCDEFGH tâm O. Lập công thức tổng quát sđ(OA, OB) ; sđ(OA, OG); sđ(OC, OG) ; sđ(OH, OD).

8. Cho góc lượng giác có số đo tổng quát là $a^0 = 40^0 + k360^0$.

a) Góc 2200^0 có là 1 góc của nó ? b) Tìm các góc $|a| \leq 1000$.

ĐS: a) đúng với k = 6 nguyên

9. Tìm cung lượng giác $\alpha = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$, k nguyên mà:

a) $-2\pi < \alpha \leq 0$ b) $|\alpha| < \frac{13\pi}{6}$

10. Tìm góc lượng giác (Ou,Ov) có số đo dương nhỏ nhất, biết một góc lượng giác (Ou,Ov) có số đo:

a) -80^0 b) 1090^0 c) $-\frac{31\pi}{7}$ d) $\frac{16\pi}{11}$

HD: vẽ biểu diễn hoặc giải bất phương trình $0 < a \leq 360$ đối với độ, $0 < a \leq 2\pi$ đối với radian để tìm k nguyên của góc cung tổng quát.

11. Đường tròn tâm O bán kính R = 1 cắt 2 trục toạ độ tại A(1;0), B(0;1), C(–1;0), D(0;–1). Lập công thức tổng quát của các góc lượng giác có điểm đầu A và điểm cuối là:

a) A ; C ; A và C b) B ; D ; B và D c) cả A, B, C, D.

12. Cho 2 góc lượng giác sau đây có cùng tia đầu, chứng minh chúng cùng tia cuối:

a) $\frac{11\pi}{3}$ và $\frac{23\pi}{3}$ b) 123^0 và -857^0

HD: Chứng minh hiệu 2 góc bằng số nguyên vòng

13. Cho các góc lượng giác sau có cùng tia đầu, góc lượng giác nào có cùng tia cuối: $2\pi/3$; $14\pi/3$; $5\pi/3$; $-4\pi/3$.

HD: biểu diễn hoặc xét hiệu 2 góc có bằng số nguyên vòng không

14. Cho 3 tia Ox,Oy,Oz bất kì. Chứng minh:

a) sđ(Oy, Ox) = –sđ(Ox,Oy) + k2π

b) sđ(Ox, Oy) + sđ(Oy, Oz) + sđ(Oz, Ox) = k2π, k nguyên.

HD: b) xét 2 vị trí theo thứ tự chiều quay dương Ox, Oy, Oz và Ox, Oz, Oy.

15. Hiện tại kim giờ, kim phút thẳng hàng lúc 6 giờ. Sau t giờ, kim giờ đến vị trí Ou, kim phút đến vị trí Ov. Hỏi sau bao lâu 2 kim trùng nhau; trùng nhau lần 1, lần 2?

16. Hai điểm A, B trên 1 đường tròn mà cung AB = 120^0 và quay cùng hướng dương với vận tốc A là 45^0 / 1 phút còn B là 60^0 /1 phút. Sau t phút, tìm số đo 2 cung mà A và B chạy được? Sau bao lâu thì chúng gặp nhau lần 1, lần 2.

ĐS: 16' và 40'

ABC

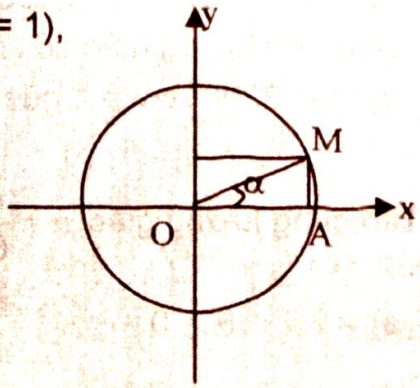
§2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

– Đường tròn lượng giác: Đường tròn đơn vị (R = 1), định hướng, với điểm gốc A(1 ; 0)

– Hệ toạ độ vuông góc Oxy gắn với đường tròn lượng giác: O là tâm đường tròn, Ox là tia OA.

– Điểm M trên đường tròn lượng giác xác định bởi số (cung hoặc góc) α: Điểm M sao cho AM là cung lượng giác α hoặc (OA, OM) là góc lượng giác α.



– Giá trị lượng giác: Cho góc lượng giác α, xét điểm M trên đường tròn lượng giác xác định bởi α. Nếu M có toạ độ (x; y) trong hệ toạ độ $(O; \vec{i}; \vec{j})$ gắn với đường tròn đó thì $\cos\alpha = x$, $\sin\alpha = y$. Nói cách khác $\overrightarrow{OM} = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}$.

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (khi $\cos\alpha \neq 0$); $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (khi $\sin\alpha \neq 0$);

– Một số tính chất cơ bản:

$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha$; $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha$

$\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$; $\cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha$ (với $k \in \mathbf{Z}$);

$-1 \le \sin\alpha \le 1$; $-1 \le \cos\alpha \le 1$

$1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ (khi $\cos\alpha \neq 0$) ; $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ (khi $\sin\alpha \neq 0$)

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

– Các trục lượng giác:

Trục sin là trục tung Oy, trục cosin là trục hoành Ox.

Trục tang là At cùng hướng với trục tung, A(1 ; 0).

Trục cotang là Bs cùng hướng với trục hoành, B(0 ; 1).

– Giá trị lượng giác của các góc (cung) có liên quan đặc biệt (giả sử các biểu thức có nghĩa)

Đối nhau : $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; $\cos(-\alpha) = -\cos\alpha$;

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$; $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$;

Hơn kém π: $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$; $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$;

$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$; $\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$;

Bù nhau: $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$; $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$;

$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$; $\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$;

Phụ nhau: $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$; $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$;

$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$; $\cot\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$;

Hơn kém $\frac{\pi}{2}$: $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$; $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$;

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot\alpha$; $\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\tan\alpha$;

B. PHÂN DẠNG TOÁN

DẠNG 1: GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

– Để biểu diễn cung lượng giác có số đo α trên đường tròn lượng giác, ta chọn điểm A(1 ; 0) làm điểm đầu của cung và xác định điểm cuối M trên đường tròn lượng giác sao cho cung $\overset{\frown}{AM}$ có sđ$\overset{\frown}{AM} = \alpha$.

– Sử dụng hệ thức cơ bản, các hằng đẳng thức để tính các giá trị lượng giác khi biết một giá trị cho trước, chú ý dấu tương ứng với toạ độ (x ; y).

– Dấu các giá trị lượng giác khi điểm cuối M thuộc góc phần tư.

	I	II	III	IV
sin	+	+	–	–
cos	+	–	–	+
tan	+	–	+	–
cot	+	–	+	–

Chú ý:

– Dấu của tan α, cot α là như nhau.

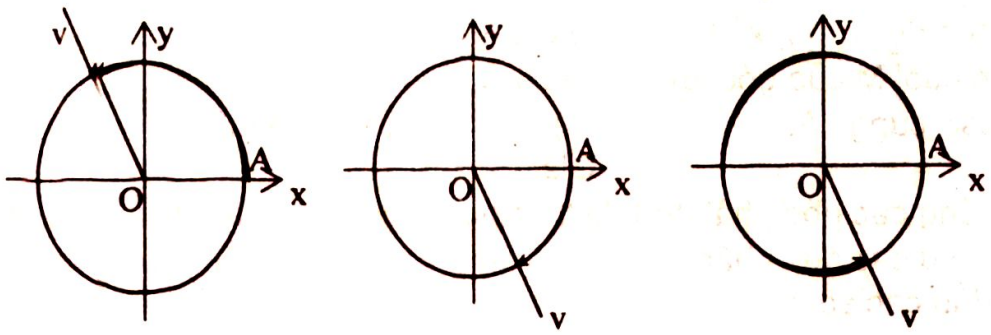
– Dùng kĩ thuật đẳng cấp bậc n để chia $\sin^n x$, $\cos^n x$ khác 0 tạo ra $\tan^n x$, $\cot^n x$.

Ví dụ 1: Tìm đường tròn định hướng, biểu diễn các cung lượng giác:

a) 120° b) $-\frac{\pi}{3}$ c) 300°

Giải

a) b) c)



Ví dụ 2: Trên đường tròn lượng giác, xác định các điểm cuối của góc lượng giác:

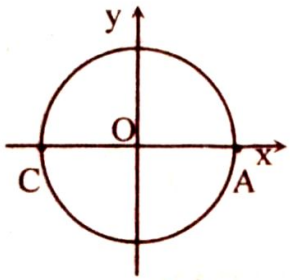
a) $k180^\circ$ b) $k90^\circ$ c) $k\frac{\pi}{3}$, k nguyên

Giải

a) $k180^\circ = k\dfrac{360^0}{2}$

Có hai điểm cuối:

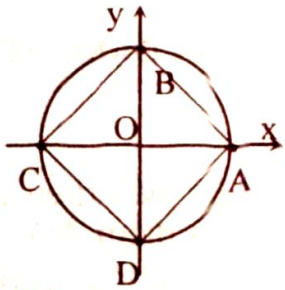
A(1 ; 0) và C(–1 ; 0)



b) $k90^\circ = k\dfrac{360^0}{4}$

Có bốn điểm cuối:

A(1 ; 0), B(0 ; 1), C(–1 ; 0) và D(0 ; –1)

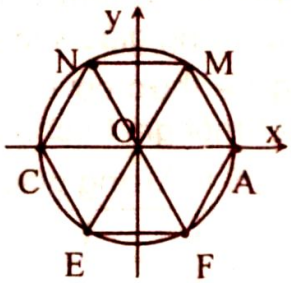


c) $k\dfrac{\pi}{3} = k\dfrac{2\pi}{6}$

Có sáu điểm cuối:

$A(1\ ;\ 0),\ M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\ N\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$C(-1\ ;\ 0),\ E\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và $F\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$



Ví dụ 3: Tìm các điểm của đường tròn lượng giác xác định bởi số α:

a) $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$ b) $\sqrt{\sin^2\alpha} = \sin\alpha$ c) $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$

Giải

Gọi điểm cuối của góc lượng giác α là M(x ; y)

M(x ; y) thuộc đường tròn (O; 1) nên $x^2 + y^2 = 1$

a) Ta có $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} \Leftrightarrow \cos\alpha \geq 0$.

Vậy M có tọa độ (x ; y), $x^2 + y^2 = 1$, $x \geq 0$

b) Ta có $\sqrt{\sin^2\alpha} = \sin\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha \geq 0$.

Vậy M có tọa độ (x ; y), $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$.

c) $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin\alpha \geq 0\\ \cos\alpha \neq 0\end{cases}$

Vậy M có tọa độ (x ; y), $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$, $y \neq 1$

Ví dụ 4: Điểm cuối M của góc lượng giác α ở vị trí nào thì :

a) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ cùng dấu ? b) $\sin\alpha$, $\tan\alpha$ khác dấu?

Giải

a) Điểm M trong các góc phần tư I, III thì $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ cùng dấu (tức $\tan\alpha > 0$).

b) Điểm M trong các góc phần tư II, III thì $\sin\alpha$, $\tan\alpha$ khác dấu (tức $\cos\alpha < 0$).

Ví dụ 5: Xét dấu các số sau:

a) $\sin 156^\circ$; $\cos(-80^\circ)$, $\tan\left(-\dfrac{17\pi}{8}\right)$, $\tan 556^\circ$

b) $\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)$; $\cos\left(\alpha - \dfrac{3\pi}{8}\right)$, $\tan\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)$ với $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

ABC

Giải

Ta đánh giá theo các góc phần tư lượng giác.

a) Do $0^\circ < 156^\circ < 180^\circ$ nên $\sin 156^\circ > 0$

Do $-90^\circ < -80^\circ < 90^\circ$ nên $\cos(-80^\circ) > 0$

Do $\tan\left(-\frac{17\pi}{8}\right) = \tan\left(-2\pi - \frac{\pi}{8}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{8}\right)$

vì $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{8} < 0$ nên $\tan\left(-\frac{17\pi}{8}\right) < 0$.

Do $\tan 556^\circ = \tan(360^\circ + 196^\circ) = \tan 196^\circ$

vì $180^\circ < 196^\circ < 270^\circ$ nên $\tan 556^\circ > 0$.

b) Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên: $0 < \alpha + \frac{\pi}{4} < \alpha \Rightarrow \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) > 0$

$\frac{\pi}{2} < \alpha - \frac{3\pi}{8} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{8}\right) > 0$

$-\frac{\pi}{2} < \alpha - \frac{\pi}{2} < 0 \Rightarrow \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) < 0$.

Ví dụ 6: Tính giá trị của góc lượng giác:

225°; -225°; 750°; -510°; $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{11\pi}{6}$; $-\frac{10\pi}{3}$, $-\frac{17\pi}{3}$

Giải

Bằng cách biểu diễn để xác định toạ độ điểm cuối M(x, y), ta có thể tách các bội của đường tròn $k360^\circ$ hoặc $k2\pi$ để tính:

$225^\circ = -135^\circ + 360^\circ$, $-225^\circ = 135^\circ - 360^\circ$,

$750^\circ = 30^\circ + 720^\circ$, $-510^\circ = -150^\circ - 360^\circ$.

$\frac{5\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi$, $\frac{11\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi$, $\frac{-10\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} - 4\pi$, $\frac{-17\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - 6\pi$.

Ta có bảng giá trị:

	225°	-225°	750°	-510°	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{10\pi}{3}$	$-\frac{17\pi}{3}$
sin	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	1	−1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
cot	1	−1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Ví dụ 7: Tính giá trị lượng giác các góc với k nguyên:

a) $-\frac{\pi}{3} + (2k + 1)\pi$ b) $k\pi$ c) $\frac{\pi}{4} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Giải

a) Ta có: $-\frac{\pi}{3} + (2k + 1)\pi = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$ nên:

$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$; $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$, $\cot\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) Xét k chẵn và k lẻ, gộp lại thì được:

$\cos k\pi = (-1)^2$, $\sin k\pi = 0$, $\tan k\pi = 0$, $\cos k\pi$ không xác định ($k \in \mathbf{Z}$)

c) Xét k chẵn và k lẻ, gộp lại thì được:

$\cos(\frac{\pi}{4} + k\pi) = (-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin(\frac{\pi}{4} + k\pi) = (-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\tan(\frac{\pi}{4} + k\pi) = \cot(\frac{\pi}{4} + k\pi) = 1$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Ví dụ 8: Có bao nhiêu giá trị khác nhau của $\cos\frac{k2\pi}{5}$, $\sin\frac{k2\pi}{5}$, $\tan\frac{k\pi}{3}$, k nguyên.

Giải

Trên đường tròn lượng giác gốc A, các điểm cuối của các cung lượng giác có số đo $\frac{k2\pi}{5}$ lập thành một ngũ giác đều lồi nội tiếp AMNPQ. Ngũ giác này nhận trục cosin làm trục đối xứng. Vậy khi ta chiếu các đỉnh của ngũ giác AMNPQ lên trục cosin thì ta được ba điểm chiếu phân biệt, do đó $\cos\frac{k2\pi}{5}$ có ba giá trị khác nhau.

Còn khi ta chiếu các đỉnh đó lên trục sin thì ta được 5 điểm phân biệt, vậy $\sin\frac{k2\pi}{5}$ có 5 giá trị khác nhau.

Đối với cung $k\frac{\pi}{3} = k\frac{2\pi}{6}$ thì 6 điểm cuối tạo thành lục giác đều AIJCEF đối xứng qua trục hoành, do đó 6 đường thẳng OA, OI, OJ, OC, OE, OF cắt trục tang tại 3 điểm phân biệt nên $\tan\frac{k\pi}{3}$ có 3 giá trị khác nhau.

Ví dụ 9: Tính các giá trị lượng giác của góc α biết:

a) $\cos\alpha = \frac{1}{4}$, $\sin\alpha < 0$ b) $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

c) $\tan\alpha = \frac{1}{2}$, $-\pi < \alpha < 0$ d) $\cot\alpha = -3$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

Giải

a) Ta có: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ và $\sin\alpha < 0$ nên:

$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{1}{16}} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\sqrt{15}$, $\cot\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\dfrac{\sqrt{15}}{15}$.

b) Vì $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha < 0$ nên:

$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$, $\cot\alpha = 2\sqrt{2}$

c) $\tan\alpha.\cot\alpha = 1 \Rightarrow \cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha} = 2$. Vì $-\pi < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha < 0$

Ta có: $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

và $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \tan\alpha.\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

d) $\tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha} = -\dfrac{1}{3}$. Vì $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Rightarrow \sin\alpha < 0$

Ta có: $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{-1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}} = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

và $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \cot\alpha.\sin\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

Ví dụ 10: Cho $\tan\alpha - 3\cot\alpha = 6$ và $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$. Tính:

a) $A = \sin\alpha + \cos\alpha$ b) $B = 2\sin\alpha\cos\alpha$ c) $C = \dfrac{2\sin\alpha - \tan\alpha}{\cos\alpha + \cot\alpha}$

Giải

Vì $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ nên $\cos\alpha < 0$, $\sin\alpha < 0$ và $\tan\alpha > 0$. Ta có:

$\tan\alpha - 3\cot\alpha = 6 \Leftrightarrow \tan\alpha - \dfrac{3}{\tan\alpha} - 6 = 0 \Leftrightarrow \tan^2\alpha - 6\tan\alpha - 3 = 0$

Vì $\tan\alpha > 0$ nên chọn $\tan\alpha = 3 + 2\sqrt{3}$.

a) $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha} = \dfrac{1}{22+12\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{-1}{\sqrt{22+12\sqrt{3}}}$, $\sin\alpha = -\dfrac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{22+12\sqrt{3}}}$

Do đó: $A = \sin\alpha + \cos\alpha = -\dfrac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{22+12\sqrt{3}}} - \dfrac{1}{\sqrt{22+12\sqrt{3}}} = -\dfrac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt{22+12\sqrt{3}}}$.

b) $B = 2\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{2(3+2\sqrt{3})}{22+12\sqrt{3}}$

c) $C = \dfrac{2\sin\alpha - \tan\alpha}{\cos\alpha + \cot\alpha} = \dfrac{\sin\alpha\left(2 - \dfrac{1}{\cos\alpha}\right)}{\cos\alpha\left(1 + \dfrac{1}{\sin\alpha}\right)}$

$= \tan^2\alpha.\ \dfrac{2\cos\alpha - 1}{\sin\alpha + 1} = (21 + 12\sqrt{3}).\dfrac{2 + \sqrt{22 + 12\sqrt{3}}}{3 + 2\sqrt{3} - \sqrt{22 + 12\sqrt{3}}}$

Ví dụ 11:

a) Cho sinxcosx = n. Tính A = sinx + cosx; B = $\sin^4x + \cos^4x$

b) Cho tanx + cotx = m. Tính C = $\tan^2x + \cot^2x$; D = $\tan^3x + \cot^3x$

Giải

a) $A^2 = 1 + 2\sin x\cos x = 1 + 2n \Rightarrow A = \pm\sqrt{1 + 2n}\ \left(n \geq -\dfrac{1}{2}\right)$

$B = (\sin^2x + \cos^2x)^2 - 2\sin^2x\cos^2x = 1 - 2n^2$

b) $C = (\tan\alpha + \cot\alpha)^2 - 2\tan\alpha\cot\alpha = m^2 - 2.$

$D = (\tan\alpha + \cot\alpha)(\tan^2\alpha - \tan\alpha.\ \cot\alpha + \cot^2\alpha) = m(m^2 - 3)$

Ví dụ 12: Cho $\tan\alpha = \dfrac{3}{5}$. Tính

$$A = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}\ ;\quad B = \frac{3\sin^2\alpha + 12\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha}$$

Giải

Vì $\tan\alpha = \dfrac{3}{5}$ nên $\cos\alpha \neq 0$, chia tử và mẫu của hai biểu thức lần lượt cho $\cos\alpha$, $\cos^2\alpha$, ta có:

$$A = \frac{\tan\alpha + 1}{\tan\alpha - 1} = \frac{\dfrac{3}{5} + 1}{\dfrac{3}{5} - 1} = -4\ ,\quad B = \frac{3\tan^2\alpha + 12\tan\alpha + 1}{\tan^2\alpha + \tan\alpha - 2} = \frac{232}{-26} = -\frac{116}{13}.$$

Ví dụ 13: Tính: $\sin^2a + \sin^2b + \sin^2c$, biết

$\tan^2a\tan^2b + \tan^2b\tan^2c + \tan^2c\tan^2a + 2\tan^2a\tan^2b\tan^2c = 1$

Giải

Từ giả thiết, thay $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ thì được:

$\sin^2a\sin^2b\cos^2c + \sin^2b\sin^2c\cos^2a + \sin^2c\sin^2a\cos^2b + 2\sin^2a\sin^2b\sin^2c$

$= \cos^2a\cos^2b\cos^2c$

$\Rightarrow \sin^2a\sin^2b + \sin^2b\sin^2c + \sin^2c\sin^2a - \sin^2a\sin^2b\sin^2c$

$= (1 - \sin^2a)(1 - \sin^2b)(1 - \sin^2c)$. Từ đó thì có $\sin^2a + \sin^2b + \sin^2c = 1$

Ví dụ 14: Cho 2sina + 3cosa = 2. Tính tan a.

Giải

Ta có: 2sina + 3cosa = 2 $\Rightarrow$ 3cosa = 2 − 2sina

$\Rightarrow 9\cos^2a = (2 - 2\sin a)^2 \Rightarrow 13\sin^2a - 8\sin a - 5 = 0$

$\Rightarrow$ sina = 1 hoặc $\sin a = -\dfrac{5}{13}$.

Xét $\sin a = 1 \Rightarrow \cos a = 0 \Rightarrow \tan a$ không xác định (Loại)

Xét $\sin a = -\frac{5}{13} \Rightarrow \cos a = \frac{12}{13} \Rightarrow \tan a = -\frac{5}{12}$.

Ví dụ 15: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức:

a) $y = 4 - 3\sin x$ b) $y = 6|\cos x| - 1$

c) $y = \sin^2 x + \cos x - 5$ d) $y = 2\tan^2 x - 8\tan x + 3$

Giải

a) Vì $-1 \le \sin x \le 1$, $\forall x$ nên $1 \le y \le 7$. Vậy $\max y = 7$, $\min y = 1$

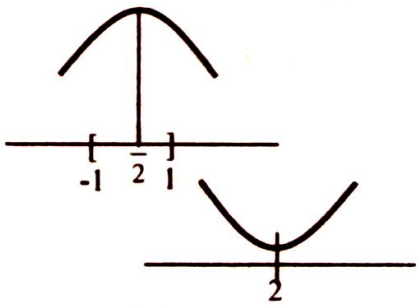
b) Vì $0 \le |\cos x| \le 1$, $\forall x$ nên $-1 \le y \le 5$. Vậy $\max y = 5$, $\min y = -1$.

c) $y = \sin^2 x + \cos x - 5 = 1 - \cos^2 x + \cos x - 5 = -\cos^2 x + \cos x - 4$

Đặt $t = \cos x$, $-1 \le t \le 1$ thì: $y = f(t) = -t^2 + t - 4$ là parabol có đỉnh $t = \frac{1}{2}$, hệ số $a = -1 < 0$ nên:

$\max y = f(\frac{1}{2}) = -\frac{15}{4}$

$\min y = f(-1) = -6$.



d) Đặt $t = \tan x$, $t \in \mathbf{R}$, ta có:

$y = f(t) = 2t^2 - 8t + 3$ là parabol có đỉnh $t = 2$, hệ số $a = 2 > 0$ nên không tồn tại $\max y$, còn $\min y = f(2) = -5$.

DẠNG 2: CHỨNG MINH HỆ THỨC

– Để chứng minh hệ thức ta sử dụng các hệ thức cơ bản và các hằng đẳng thức.

– Có thể chứng minh đẳng thức bằng cách biến đổi vế này thành vế kia, hoặc biến đổi tương đương về đẳng thức đúng.

Chú ý:

– Nếu cần đặt ẩn phụ.

– Hệ thức không phụ thuộc biến, có thể biết trước kết quả bằng cách chọn biến là một góc đặc biệt.

Ví dụ 1: Đơn giản biểu thức:

$A = \sqrt{\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha . \cos^2 \alpha}$ $B = \frac{1-\cos\alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{1+\cos\alpha}$

$C = \frac{1-\sin^2 \alpha . \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \cos^2 \alpha$

Giải

$A = \sqrt{\sin^2 \alpha(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} = \sqrt{\sin^2 \alpha} = |\sin\alpha|$

$B = \frac{1-\cos\alpha}{1-\cos^2 \alpha} - \frac{1}{1+\cos\alpha} = \frac{1}{1+\cos\alpha} - \frac{1}{1+\cos\alpha} = 0$

$C = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha - 1 = \tan^2\alpha.$

Ví dụ 2: Tìm điều kiện và tính gọn không còn dấu căn thức:

a) $A=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}-\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$ b) $B=\sqrt{1-\cot^2 x.\sin^2 x}+1$

Giải

a) A xác định $\Leftrightarrow \cos x \neq \pm 1 \Leftrightarrow x \neq k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

$$A=\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)^2}}-\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{(1-\cos x)^2}}=\frac{|\sin x|}{|1+\cos x|}-\frac{\sin x}{|1-\cos x|}$$

$$=\frac{|\sin x|}{1+\cos x}-\frac{|\sin x|}{1-\cos x}=\frac{|\sin x|[(1-\cos x)-(1+\cos x)]}{(1+\cos x)(1-\cos x)}$$

$$=\frac{-|\sin x|.2\cos x}{\sin^2 x}=\begin{cases}-2\cot x & \text{khi } \sin x>0\\ 2\cot x & \text{khi } \sin x<0\end{cases}.$$

b) B xác định $\Leftrightarrow \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

$$B=\sqrt{1-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}.\sin^2 x}+1=\sqrt{1-\cos^2 x}+1$$

$$=|\sin x|+1=\begin{cases}\sin x+1 & \text{khi } \sin x>0\\ -\sin x+1 & \text{khi } \sin x<0\end{cases}.$$

Ví dụ 3: Chứng minh hệ thức

a) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=2\cos^2\alpha-1$

b) $1-\cot^4\alpha=\frac{2}{\sin^2\alpha}-\frac{1}{\sin^4\alpha}$

c) $\frac{1+\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=1+2\tan^2\alpha$

d) $2(1-\sin\alpha)(1+\cos\alpha)=(1-\sin\alpha+\cos\alpha)^2$

Giải

a) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$

$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=2\cos^2\alpha-1.$

b) $1-\cot^4\alpha=(1+\cot^2\alpha)(1-\cot^2\alpha)$

$$=\frac{1}{\sin^2\alpha}\left(1-\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)=\frac{1}{\sin^2\alpha}\left[\frac{\sin^2\alpha-(1-\sin^2\alpha)}{\sin^2\alpha}\right]$$

$$=\frac{2\sin^2\alpha-1}{\sin^4\alpha}=\frac{2}{\sin^2\alpha}-\frac{1}{\sin^4\alpha}$$

c) $\frac{1+\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\frac{1+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}+\tan^2\alpha=1+2\tan^2\alpha$

d) $2(1-\sin\alpha)(1+\cos\alpha)=2-2\sin\alpha+2\cos\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha$

$=1+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha+2\cos\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha$

$=(1-\sin\alpha+\cos\alpha)^2$

Ví dụ 4 Chứng minh hệ thức:

a) $\dfrac{1+\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{1-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}=\dfrac{2}{3\cos^2\alpha}$ b) $\dfrac{\sin^2\alpha(1+\cos\alpha)}{\cos^2\alpha(1+\sin\alpha)}=\dfrac{\sin\alpha+\tan\alpha}{\cos\alpha+\cot\alpha}$

c) $\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{\cot\beta-\cot\alpha}=\tan\alpha\tan\beta$ d) $\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cot^2\alpha-\tan^2\alpha}=\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

Giải

a) $VT=\dfrac{1+(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)}{1-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)}$

$=\dfrac{1+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{1-\left[(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-(3\sin^2\alpha\cos^2\alpha)\right]}=\dfrac{2\sin^2\alpha}{3\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\dfrac{2}{3\cos^2\alpha}$

b) $VP=\dfrac{\sin\alpha+\tan\alpha}{\cos\alpha+\cot\alpha}=\dfrac{\sin\alpha\left(1+\dfrac{1}{\cos\alpha}\right)}{\cos\alpha\left(1+\dfrac{1}{\sin\alpha}\right)}=\dfrac{\sin^2\alpha(1+\cos\alpha)}{\cos^2\alpha(1+\sin\alpha)}$

c) $VT=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{\dfrac{1}{\tan\beta}-\dfrac{1}{\tan\alpha}}=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{\tan\alpha.\tan\beta}=\tan\alpha\tan\beta$

d) $VT=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\sin^2\alpha\cos^2\alpha.\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}$

$=\sin^2\alpha.\cos^2\alpha\dfrac{1}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\sin^2\alpha.\cos^2\alpha.$

Ví dụ 5: Chứng minh hệ thức:

a) $\dfrac{1-4\sin^2x\cos^2x}{(\sin x+\cos x)^2}=(\sin x-\cos x)^2$ b) $\dfrac{\sin^2x-\cos^2x+\cos^4x}{\cos^2x-\sin^2x+\sin^4x}=\tan^4x$

Giải

a) $VT=\dfrac{1-4\sin^2x\cos^2x}{(\sin x+\cos x)^2}=\dfrac{(\sin^2x+\cos^2x)^2-4\sin^2x\cos^2x}{(\sin x+\cos x)^2}$

$=\dfrac{(\sin^2x-\cos^2x)^2}{(\sin x+\cos x)^2}=(\sin x-\cos x)^2$

b) $VT=\dfrac{\sin^2x-\cos^2x(1-\cos^2x)}{\cos^2x-\sin^2x(1-\sin^2x)}=\dfrac{\sin^2x(1-\cos^2x)}{\cos^2x(1-\sin^2x)}=\tan^4x$

Ví dụ 6: Chứng minh biểu thức không phụ thuộc α:

$A=2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)$

$B=\sqrt{\sin^4\alpha+4\cos^2\alpha}+\sqrt{\cos^4\alpha+4\sin^2\alpha}$

$C = \dfrac{2}{\tan\alpha - 1} + \dfrac{\cot\alpha + 1}{\cot\alpha - 1}$ (điều kiện có nghĩa).

Giải

a) Ta có: $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^3$

$- 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

và $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

Do đó: $A = 2 - 6\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 3(1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha) = 2 - 3 = -1$.

b) $\sqrt{\sin^4\alpha + 4(1-\sin^2\alpha)} = \sqrt{(2-\sin^2\alpha)^2} = |2-\sin^2\alpha| = 2-\sin^2\alpha$

$\sqrt{\cos^4\alpha + 4(1-\cos^2\alpha)} = \sqrt{(2-\cos^2\alpha)^2} = |2-\cos^2\alpha| = 2-\cos^2\alpha$

Do đó: $B = 4 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 4 - 1 = 3$.

c) $C = \dfrac{2}{\tan\alpha - 1} + \dfrac{\dfrac{1}{\tan\alpha} + 1}{\dfrac{1}{\tan\alpha} - 1} = \dfrac{2}{\tan\alpha - 1} + \dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha} = \dfrac{1-\tan\alpha}{\tan\alpha - 1} = -1$

Ví dụ 7: Chứng minh biểu thức không phụ thuộc biến

a) $M = 2\cos^4x - \sin^4x + \sin^2x.\cos^2x + 3\sin^2x$

b) $N = \sin^2y.\tan^2y + 4\sin^2y - \tan^2y + 3\cos^2y$

c) $P = \dfrac{\tan^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \cos^2 x}.\cot^6 x$ (điều kiện có nghĩa).

Giải

a) Đặt $a = \sin^2x$ thì $\cos^2x = 1 - a$

$M = 2(1 - a)^2 - a^2 + a(1 - a) + 3a = 2$

b) $N = -\tan^2y(1 - \sin^2y) + 4\sin^2y + 3\cos^2y$

$= -\tan^2y.\cos^2y + 4\sin^2y + 3\cos^2y$

$= -\sin^2y + 4\sin^2y + 3\cos^2y = 3(\sin^2y + \cos^2y) = 3$

c) $P = \dfrac{\sin^2 x\left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1\right)}{\cos^2 x\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - 1\right)}.\cot^6 x = \dfrac{\sin^2 x.\tan^2 x}{\cos^2 x.\cot^2 x}.\cot^6 x = 1$

Ví dụ 8: Với số α, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, xét điểm cuối M của góc lượng giác 2α. Gọi AA' là đường kính của đường tròn định hướng. Dựa vào cạnh, góc, diện tích của tam giác vuông A'MA, chứng minh: $\cos2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, $\sin2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$.

Áp dụng tính: $\sin\dfrac{\pi}{8}$.

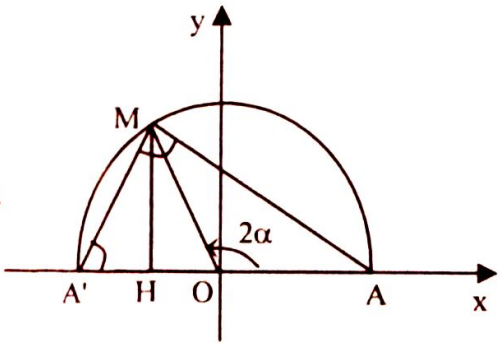
Giải

Ta có $AM^2 = \overline{AH}.\overline{A\,A'} = (\overline{AO} + \overline{OH}).\overline{AA'} = (-1 + \cos2\alpha).(-2) = 2(1 - \cos2\alpha)$

Mặt khác, $AM^2 = A'A^2.\sin^2\alpha = 4\sin^2\alpha$

So sánh thì được $2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$

nên $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$



Ta có: $S_{A'MA} = \frac{1}{2}A'.A.MH = MH = \sin 2\alpha$

Mặt khác: $S_{A'MA} = \frac{1}{2}A'M.AM$

$= \frac{1}{2}A'A\cos\alpha.A'A\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

So sánh thì được $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, áp dụng:

$$\cos\frac{\pi}{4} = 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{8} \Rightarrow \sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Ví dụ 9: Chứng minh bất đẳng thức

a) $|\sin x + \cos x| \le \sqrt{2}$ b) $|\tan x + \cot x| \ge 2, x \ne k\frac{\pi}{2}$

c) $\sin x \le x, \forall x > 0$ d) $\sin^4 x + \cos^{12} x \le 1$

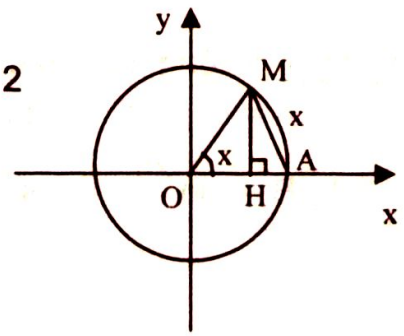
Giải

a) BĐT $\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^2 \le 2 \Leftrightarrow 1 + 2\sin x\cos x \le 2$

$\Leftrightarrow 1 - 2\sin x\cos x \ge 0 \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)^2 \ge 0$: Đúng

b) Vì tanx, cotx cùng dấu nên:

$|\tan x + \cot x| = |\tan x| + |\cot x| \ge 2\sqrt{|\tan x.\cot x|} = 2$



c) Xét $x \ge 1$ thì $\sin x \le 1 \le x$

Xét $0 < x < 1$ thì $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$\sin x = MH < MA = đd\overset{\frown}{MA} = x$

d) Vì $|\sin x| \le 1, |\cos x| \le 1$ nên:

$\sin^4 x \le \sin^2 x, \cos^{12} \le \cos^2 x \Rightarrow \sin^4 x + \cos^{12} x \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Ví dụ 10: Chứng minh bất đẳng thức:

a) $|3\sin a - 4\cos a| \le 5, \forall a$

b) $\tan a(\cot b + \cot c) + \tan b(\cot c + \cot a) + \tan c(\cot a + \cot b) \ge 6$ với a, b, c là những góc nhọn.

Giải

a) BĐT $\Leftrightarrow (3\sin a - 4\cos a)^2 \le 25$

$\Leftrightarrow 9\sin^2 a - 24\sin a\cos a + 16\cos^2 a \le 25(\sin^2 a + \cos^2 a)$

$\Leftrightarrow 16\sin^2 a + 24\sin a\cos a + 9\cos^2 a \ge 0 \Leftrightarrow (4\sin a + 3\cos a)^2 \ge 0$: Đúng

b) Vì a, b, c nhọn nên tana, tanb, tanc dương. Áp dụng BĐT Côsi:

$$\frac{\tan a}{\tan b} + \frac{\tan b}{\tan a} \ge 2; \frac{\tan b}{\tan c} + \frac{\tan c}{\tan b} \ge 2; \frac{\tan c}{\tan a} + \frac{\tan a}{\tan c} \ge 2$$

Suy ra bất đẳng thức phải chứng minh.

DẠNG 3: GÓC CUNG LIÊN QUAN ĐẶC BIỆT

Sử dụng quan hệ hai góc có liên quan đặc biệt

– Đối nhau: α và $-\alpha$; a – b và b – a;...

– Bù nhau: α và $\pi - \alpha$; $\frac{\pi}{3} - \alpha$ và $\frac{2\pi}{3} + \alpha$;...

– Phụ nhau: α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$; $\frac{\pi}{3} - \alpha$ và $\frac{\pi}{6} + \alpha$;...

– Hơn kém π: α và $\pi + \alpha$; $\frac{7\pi}{6} + \alpha$ và $\frac{\pi}{6} + \alpha$;...

– Hơn kém $\frac{\pi}{2}$: α và $\frac{\pi}{2} + \alpha$; $\frac{\pi}{6} + \alpha$ và $\frac{2\pi}{3} + \alpha$;...

Chú ý:

– Với mọi k nguyên: $\sin(\alpha \pm k2\pi) = \sin\alpha$, $\cos(\alpha \pm k2\pi) = \cos\alpha$

$\tan(\alpha \pm k2\pi) = \tan\alpha$, $\cot(\alpha \pm k2\pi) = \cot\alpha$

– Với mọi k nguyên: $\tan(\alpha \pm k\pi) = \tan\alpha$, $\cot(\alpha \pm k\alpha) = \cot\alpha$

– Với góc α rad hoặc a độ, dùng các quan hệ trên thì đưa về góc chuẩn từ 0 đến $\frac{\pi}{4}$ rad hoặc 0° hoặc 45°.

– Tam giác ABC: $A + B + C = \pi$, $A + B = \pi - C$; $\frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$

Ví dụ 1: Không dùng bảng và máy tính, tính:

a) $A = \cos315^\circ + \sin330^\circ + \sin250^\circ - \cos160^\circ$

b) $B = \sin\frac{25\pi}{6} + \cos\frac{25\pi}{3} + \tan\left(-\frac{25\pi}{4}\right)$.

Giải

a) $\cos315^\circ = \cos(-45^\circ) = \cos45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin330^\circ = -\sin30^\circ = -\frac{1}{2}$

$\sin250^\circ = -\sin110^\circ = -\sin(90^\circ + 20^\circ) = -\cos20^\circ$; $\cos160^\circ = -\cos20^\circ$.

Do đó: $A = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$

b) $\sin\frac{25\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $\cos\frac{25\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$\tan\left(-\frac{25\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$. Do đó: B = 0

Ví dụ 2: Không dùng bảng và máy tính, tính:

a) $A = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + ... + \sin^2 80^\circ$

b) $B = \cos10^\circ + \cos20^\circ + \cos30^\circ + ... + \cos180^\circ$

c) $C = \tan1^\circ.\tan3^\circ.\tan5^\circ... \tan89^\circ$.

Giải

a) $A = (\sin^2 10^\circ + \sin^2 80^\circ) + (\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ)$
$+ (\sin^2 30^\circ + \sin^2 60^\circ) + (\sin^2 40^\circ + \sin^2 80^\circ)$
$= (\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ) + (\sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ)$
$+ (\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ) + (\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ) = 4.$

b) $B = (\cos 10^\circ + \cos 170^\circ + (\cos 20^\circ + \cos 160^\circ) + ...$
$+ (\cos 80^\circ + \cos 100^\circ) + \cos 90^\circ + \cos 180^\circ = 0 + 0 - 1 = -1$

c) $C = (\tan 1^\circ \tan 89^\circ)(\tan 3^\circ \tan 87^\circ)... (\tan 43^\circ \tan 47^\circ)\tan 45^\circ$
$= (\tan 1^\circ \cot 1^\circ)(\tan 3^\circ \cot 3^\circ)... (\tan 43^\circ \cot 43^\circ).\ 1 = 1$

Ví dụ 3:

a) Cho $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$. Tính các giá trị lượng giác của góc -75°.

b) Cho $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{3}$. Tính $\cos(2\pi - \alpha)$, $\tan(\alpha - 7\pi)$, $\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$.

Giải

a) $1 + \tan^2 45^\circ = \frac{1}{\cos^2 15} \Rightarrow \cos^2 15^\circ = \frac{1}{1+(2-\sqrt{3})^2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$

Do đó $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$; $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

Vì $75^\circ = 90^\circ - 15^\circ$ nên $\cos(-75^\circ) = \cos 75^\circ = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$\sin(-75^\circ) = -\sin(90^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ = -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

$\tan(-75^\circ) = \cot 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}-2} = -(\sqrt{3} + 2)$; $\cot(-75^\circ) = -\tan 15^\circ = \sqrt{3} - 2$

b) $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{3} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{3}$. Do đó:

$\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan(\alpha - 7\pi) = \tan\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$; $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha = \mp\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Ví dụ 4:

a) Tính $\cos\alpha$ biết $\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) + \sin\frac{\pi}{2} = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$

b) Tính $\sin\alpha$ biết: $\cot(\alpha + 540^\circ) - \tan(\alpha - 90^\circ) = \sin^2(725^\circ) + \cos^2(365^\circ)$.

Giải

a) Từ giả thiết thì: $-\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) + 1 = \cos\alpha$

$\Rightarrow -\cos\alpha + 1 = \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}$.

b) Từ giả thiết thì: $\cot\alpha + \cot\alpha = \sin^2 50^\circ + \cos^2 50^\circ = 1 \Rightarrow 2\cot\alpha = 1$

$\Rightarrow \cot\alpha = \frac{1}{2}$. Ta có: $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Ví dụ 5: Lập quan hệ các giá trị lượng giác của 2 góc:

a) α và $\alpha - \frac{\pi}{2}$ b) α và $\alpha - \frac{3\pi}{2}$

Giải

a) $\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$

$\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\tan\alpha$; $\cot(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\cot\alpha$

b) $\cos(\alpha - \frac{3\pi}{2}) = \cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \cos(\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha)$

$= -\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = -\sin\alpha$.

$\sin(\alpha - \frac{3\pi}{2}) = \sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\sin(\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$

$\tan(\alpha - \frac{3\pi}{2}) = -\cot\alpha$; $\cot(\alpha - \frac{3\pi}{2}) = -\tan\alpha$

Ví dụ 6: Tính gọn:

$P = \cos(\frac{\pi}{2} + x) + \cos(2\pi - x) + \sin(\pi - x) + \cos(\pi + x)$;

$Q = 2\cos x - 3\cos(\pi + x) - 5\sin(\frac{\pi}{2} - x) + \cot(\frac{3\pi}{2} - x)$

$R = \cos(\pi - x) - 2\sin(\frac{3\pi}{2} + x) + \tan(\frac{3\pi}{2} - x) + \cot(2\pi - x)$.

Giải

$P = -\sin x + \cos(-x) + \sin x - \cos x = \cos x - \cos x = 0$

$Q = 2\cos x + 3\cos x - 5\cos x + \cot(\frac{\pi}{2} - x) = \tan x$

$R = -\cos x + 2\sin(\frac{\pi}{2} + x) + \tan(\frac{\pi}{2} - x) + \cot(-x)$

$= -\cos x + 2\cos x + \cot x - \cot x = \cos x$.

Ví dụ 7: Tính gọn:

$A = \tan 18^\circ \tan 288^\circ + \sin 32^\circ . \sin 148^\circ - \sin 302^\circ \sin 122^\circ$

$B = \frac{\cos(-288^\circ)\cot 72^\circ}{\tan(-162^\circ)\sin 108^\circ} - \tan 18^\circ$

$C = \tan(-3,1\pi) . \cos(5,9\pi) + \sin(-3,6\pi)\cot(-5,6\pi)$

Giải

$A = \tan(90^\circ - 72^\circ)\tan(360^\circ - 72^\circ) + \sin 32^\circ \sin(180^\circ - 32^\circ)$
$- \sin(360^\circ - 58^\circ)\sin(180^\circ - 58^\circ)$

$= \cot 72^\circ(-\tan 72^\circ) + \sin^2 32^\circ + \sin^2 58^\circ$

$= -1 + \sin^2 32^\circ + \cos^2 32^\circ = -1 + 1 = 0$

$$B = \frac{\cos(72^\circ - 360^\circ)\cot 72^\circ}{\tan(18^\circ - 180^\circ)\sin(180^\circ - 72^\circ)} - \tan 18^\circ = \frac{\cos 72^\circ \cot 72^\circ}{\tan 18^\circ \sin 72^\circ} - \tan 18^\circ$$

$$= \frac{\cot^2 72^\circ}{\tan 18^\circ} - \tan 18^\circ = \frac{\tan^2 18^\circ}{\tan 18^\circ} - \tan 18^\circ = 0$$

$C = \tan(-0,1\pi).\cos(0,1\pi) + \sin(0,4\pi).\cot(0,4\pi)$

$= -\tan(0,1\pi).\cos(0,1\pi) + \cos(0,4\pi)$

$= -\sin(0,1\pi) + \cos(0,4\pi) = 0.$

Ví dụ 8:

Cho A, B, C là 3 góc của một tam giác, chứng minh

a) $\sin(A + B) = \sin C$ b) $\cos(A + B) = -\cos C$

c) $\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}$ d) $\tan\frac{A+B}{2} = \cot\frac{C}{2}$

e) $\sin\frac{3(A+B)}{2} = -\cos\frac{3C}{2}$ g) $\cot\frac{3(A+B)}{2} = \tan\frac{3C}{2}$

h) $\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B+C}{2} + \cos\frac{A}{2}.\sin\frac{B+C}{2} + \tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B+C}{2} = 2$

Giải

A, B, C là 3 góc tam giác nên $A + B + C = \pi$

a) $\sin(A + B) = \sin(\pi - C) = \sin C$

b) $\cos(A + B) = \cos(\pi - C) = -\cos C$

c) $\sin\frac{A+B}{2} = \sin\frac{\pi - C}{2} = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}) = \cos\frac{C}{2}$

d) $\tan\frac{A+B}{2} = \tan\frac{\pi - C}{2} = \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}) = \cot\frac{C}{2}$

e) $\sin\frac{3(A+B)}{2} = \sin\frac{3(\pi - C)}{2} = \sin(\frac{3\pi}{2} - \frac{3C}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{3C}{2}) = -\cos\frac{3C}{2}$

g) $\cot\frac{3(A+B)}{2} = \cot\frac{3(\pi - C)}{2} = \cot(\frac{3\pi}{2} - \frac{3C}{2}) = \cot(\frac{\pi}{2} - \frac{3C}{2}) = \tan\frac{3C}{2}$

h) $\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B+C}{2} + \cos\frac{A}{2}.\sin\frac{B+C}{2} + \tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B+C}{2}$

$= \sin\frac{A}{2}.\sin\frac{A}{2} + \cos\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2} + \tan\frac{A}{2}.\cot\frac{A}{2} = 1 + 1 = 2.$

C. BÀI LUYỆN TẬP

1. Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các cung góc:

a) $\frac{\pi}{2}$ b) -300^0 c) $\frac{35\pi}{6}$ d) 1115^0

2. Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các cung góc:

a) $\frac{k\pi}{2}$ b) $\frac{k2\pi}{5}$ c) $12^0 + k120^0$ d) $(-1)^k \frac{k\pi}{4}$

3. Điểm cuối của cung lượng giác nào trùng nhau :

120^0 ; 380^0 ; $-\frac{5\pi}{3}$; 2000^0; 840^0 và $\frac{2\pi}{3}$.

HD: Biểu diễn trên đường tròn lượng giác

4. Trên đường tròn lượng giác, cho cung $\alpha \in (0;\pi/2)$.

Dựng các cung $-\alpha$; $\pi-\alpha$; $\frac{\pi}{2}-\alpha$; $\frac{\pi}{2}+\alpha$; $\pi+\alpha$.

5. Xác định điểm cuối của cung lượng giác α biết:

a) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ b) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ c) $\tan\alpha > 1$ d) $\cot\alpha > 0$

6. Xác định dấu của các biểu thức sau:

a) $\sin 215^\circ \tan\frac{21\pi}{17}$ b) $\cos\frac{4\pi}{5}\sin(-\frac{\pi}{5})$ c) $\tan(\frac{4\pi}{3})\cot\frac{9\pi}{5}$

ĐS: a) dương b) dương c) âm

7. Tìm $k \in \mathbf{Z}$ biết rằng:

a) $\sin(21^0 - k90^0) > 0$ b) $\cos(\pi/6 + k\pi) < 0$

ĐS: a) $k = 4m$, $k = 4m + 3$ b) $k = 2m + 1$

8. Biểu diễn và tính các giá trị lượng giác của các cung sau:

a) 210° b) -240° c) $3\pi/2$ d) $-8\pi/3$

9. Tính các giá trị lượng giác của các góc sau:

a) $k120^0$ b) $30^0 + k90^\circ$ c) $-\pi/4 + k\pi$

10. Tính các giá trị lượng giác khác của α biết:

a) $\cos\alpha = 3/3$, $\sin\alpha < 0$ b) $\sin\alpha = -1/8$, $\pi/2 < \alpha < 3\pi/2$

c) $\tan\alpha = 7$, $-\pi < \alpha < 0$ d) $\cot\alpha = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, $\cos\alpha > 0$

HD: sử dụng hệ thức cơ bản, chú ý dấu của giá trị lượng giác

11. Cho $\tan\alpha = -2$. Tính: $A = \frac{2\sin\alpha + 7\cos\alpha}{\cos\alpha - 5\sin\alpha}$, $B = \frac{9\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha + 1}$

HD: chia tử và mẫu lần lượt cho $\cos\alpha$, $\cos^2\alpha$

12. Chứng minh:

a) $\frac{\sin x + \cos x - 1}{1 - \cos x} = \frac{2\cos x}{\sin x - \cos x + 1}$ b) $\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = 2 + \tan^2 x + \cot^2 x$

c) $\tan x.\tan y = \frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y}$ d) $(\sqrt{\frac{1+\sin a}{1-\sin a}} - \sqrt{\frac{1-\sin a}{1+\sin a}})^2 = 4\tan^2 a$

HD: sử dụng hệ thức cơ bản

13. Chứng minh các biểu thức sau đôc lập với biến:

$A = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$

$B = (\sin^4 x + \cos^4 x - 1)(\tan^2 x + \cot^2 x + 2)$

$C = 3(\sin^8 x - \cos^8 x) + 4(\cos^6 x - 2\sin^6 x) + 6\sin^4 x$

$D = \dfrac{\sin^4 x + 3\cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x + 3\cos^4 x - 1}$

ĐS: $A = 2, B = -2, C = 1$ $D = \dfrac{3}{2}$

14. Chứng minh biểu thức không phụ thuộc biến:

a) $A = 2(\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x)^2 - (\sin^8 x + \cos^8 x)$

b) $B = \sin^2\alpha \tan^2\alpha + 4\sin^2\alpha - \tan^2\alpha + 3\cos^2\alpha$

c) $C = \cot^2 x \cot^2 y - \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y}$

15. Chứng minh nếu $\dfrac{\sin^4 c}{a} + \dfrac{\cos^4 c}{b} = \dfrac{1}{a+b}$ thì $\dfrac{\sin^8 c}{a^3} + \dfrac{\cos^8 c}{b^3} = \dfrac{1}{(a+b)^3}$

HD: sử dụng hệ thức cơ bản

16. Với k nguyên thì đại lượng sau có bao nhiêu giá trị khác nhau:

a) $\cos\dfrac{k\pi}{3}$ b) $\sin\dfrac{k\pi}{5}$ c) $\cot(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{k\pi}{2})$ d) $\tan\dfrac{k\pi}{6}$

17. Chứng minh tam giác ABC cân nếu:

a) $\dfrac{\cos^2 A - \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \dfrac{\cot^2 A + \cot^2 B}{2}$

b) $\sin A \cos^3 B = \sin B . \cos^3 A$

HD: sử dụng hệ thức cơ bản để chứng minh A = B.

18. Tính: a) $\cos(-250^0)$ b) $\sin 520^0$ c) $\sin\dfrac{11\pi}{10}$

19. Tính $\sin(\pi/2 + k\pi)$; $\cos(-\pi/6 + k\pi)$; $\tan(60^0 + k180^0)$

20. Đơn giản:

$A = \cos(\pi - x) + \sin(x - \dfrac{3\pi}{2}) - \tan(\dfrac{\pi}{2} + x)\cot(\dfrac{3\pi}{2} - x)$

$B = \cos(270^0 - x) - 2\sin(x - 450^0) + \cos(x + 900^0) + 2\sin(720^0 - x)$

$C = \cos(5\pi + \alpha) - 2\sin(\dfrac{11\pi}{2} - \alpha) - \sin(\dfrac{11\pi}{2} + \alpha)$

$D = \cos(\dfrac{\pi}{2} - \alpha) + \cos(\pi - \alpha) + \cos(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha) + \cos(2\pi - \alpha)$

HD: sử dụng các góc có liên quan đặc biệt

21. Tính gọn:

$M = \cos(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha) - \sin(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha) + \cos(\alpha - \dfrac{7\pi}{2}) + \sin(\dfrac{7\pi}{2} - \alpha)$

$N = \sin(\dfrac{5\pi}{2} - \alpha) - \cos(\dfrac{11\pi}{2} - \alpha) - 3\sin(\alpha - 5\pi) + \tan(\dfrac{7\pi}{2} - \alpha)\tan(-\alpha)$

22. Tính gọn :

$A = \tan 1^0 . \tan 2^0 . \tan 3^0 ... \tan 89^0$

$B = \cos^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{5\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{9} + \cos^2\frac{11\pi}{18} + \cos^2\frac{13\pi}{18} + \cos^2\frac{2\pi}{9}$

$C = \sin\frac{\pi}{5} + \sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{3\pi}{5} + ... + \sin\frac{9\pi}{5}$

23. Tính gọn:

$D = \frac{\sin(-4,8\pi).\sin(-5,7\pi)}{\cot(-5,2\pi)} + \frac{\cos(-6,7\pi).\cos(-5,8\pi)}{\tan(-6,2\pi)}$

$E = \sin^2\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{\pi}{6} + \sin^2\frac{\pi}{9} + \sin^2\frac{2\pi}{9} + \sin^2\frac{5\pi}{18} + \sin^2\frac{7\pi}{18}$

$F = \sin825^\circ\cos(-15^\circ) + \cos75^\circ\sin(-555^\circ) + \tan155^\circ\tan245^\circ$

ĐS: D = 1, E = 3, F = 0

24. Tính gọn:

$G = \cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{3\pi}{9} + ... + \cos\frac{9\pi}{9}$

$H = \cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} + ... + \cos\frac{9\pi}{5}$

$K = \sin\frac{2\pi}{n} + \sin2\frac{2\pi}{n} + \sin3\frac{2\pi}{n} + ... + \sin n\frac{2\pi}{n}$

ĐS: G = −1, H = −1, K = 0

25. Tìm GTLN, GTNN của hàm số:

a) $y = 3\sin x - 2$ b) $y = 4 - 3\cos^2 x$

c) $y = 1 + 2|\cos x|$ d) $y = \cos^2 x + \sin x + 4$

HD: sử dụng điều kiện về sin x, cos x thuộc đoạn [−1;1]

26. Tìm GTLN, GTNN của hàm số: a) $y = |\tan x + \cot x|$ b) $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}$

27. Tìm GTLN, GTNN của hàm số: $y = m\sin^2 x - 4(m-2)\cos x + 2m$ theo tham số m.

HD: đặt $t = \cos x$, $-1 \le t \le 1$

28. So sánh :

a) sin x và cos x trên khoảng $(0, \frac{\pi}{4})$.

b) cosA và cos B với A, B là 2 góc của tam giác ABC.

29. Trong mặt phẳng (Oxy) cho P(2;−3)

a) Chứng minh điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}$ nằm trên đường tròn lượng giác.

b) Tìm toạ độ M và các giá trị lượng giác của (Ox,OP).

HD: b) $M(\frac{2}{\sqrt{13}}; -\frac{3}{\sqrt{13}})$

30. Cho tam giác ABC vuông tại A, $\hat{B} = \alpha$, AB = m.

Vẽ phân giác BD. Dùng tính chất phân giác, chứng minh: $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

Suy ra giá trị $\tan\frac{\pi}{12}$.

§3. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

– Công thức cộng:

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$; $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$; $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$.

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$; $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

Công thức nhân, hạ bậc hai:

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$; $\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

$\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos2\alpha}{2}$, $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos2\alpha}{2}$

– Công thức biến đổi:

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$,

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$

$\tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$; $\tan\alpha-\tan\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$

$\cot\alpha+\cot\beta=\dfrac{\cos(\beta+\alpha)}{\sin\alpha.\sin\beta}$; $\cot\alpha-\cot\beta=\dfrac{\cos(\beta-\alpha)}{\sin\alpha.\sin\beta}$

Chú ý: • $\sin\alpha\pm\cos\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha\pm\dfrac{\pi}{4})$, $\cos\alpha\pm\sin\alpha=\sqrt{2}\cos(\alpha\mp\dfrac{\pi}{4})$

• Đặt $t=\tan\dfrac{\alpha}{2}$ thì :$\sin\alpha=\dfrac{2t}{1+t^2}$; $\cos\alpha=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$; $\tan\alpha=\dfrac{2t}{1-t^2}$.

$\dfrac{2t}{1+t^2}=\dfrac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}=\sin\alpha$

B. PHÂN DẠNG TOÁN

DẠNG 1: TÍNH GIÁ TRỊ

– Vận dụng công thức cộng, công thức nhân, công thức hạ bậc, công thức biến đổi để đưa về góc đặc biệt đã biết.

– Phối hợp với các hệ thức cơ bản và các công thức về góc liên quan đặc biệt: đối, bù, phụ, hơn kém $\frac{\pi}{2}$, hơn kém π.

Chú ý:

– Ghép giá trị lượng giác của cặp góc cùng tổng, có quan hệ với góc mới.

– Ghép giá trị lượng giác của góc nhân đôi liên tiếp.

– Nhân và chia thêm giá trị lượng giác của góc đầu, nửa góc đầu.

Ví dụ 1: Tính các giá trị lượng giác của góc: a) 75° b) 15°.

Giải

a) $\cos75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos45^\circ\cos30^\circ - \sin45^\circ\sin30^\circ$.

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$$

$\sin75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin45^\circ\cos30^\circ + \cos45^\circ\sin30^\circ$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$$

$\tan75^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2 + \sqrt{3}$; $\cot75^\circ = 2 - \sqrt{3}$.

b) $\cos15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos45^\circ\cos30^\circ + \sin45^\circ\sin30^\circ$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$$

$\sin15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin45^\circ\cos30^\circ - \cos45^\circ\sin30^\circ$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$$

$\tan15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3}$; $\cot15^\circ = 2 + \sqrt{3}$

Chú ý: – Hai góc 75° và 15° phụ nhau nên $\cos15^\circ = \sin75^\circ$;...

– Ta có thể sử dụng công thức hạ bậc hai:

$$2\cos^2 15^\circ = 1 + \cos30^\circ = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$2\sin^2 15^\circ = 1 - \cos30^\circ = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\tan15^\circ = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = 2 - \sqrt{3} \text{ ; } \cot15^\circ = 2 + \sqrt{3}.$$

Ví dụ 2: Cho $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính các giá trị lượng giác của góc 2α và $\frac{\alpha}{2}$.

Giải

Vì $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos\alpha < 0$. Do đó:

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Ta có: $\sin2\alpha = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$; $\cos2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{7}{9}$

$$\tan2\alpha = -\frac{4\sqrt{2}}{7} ; \cot2\alpha = -\frac{7\sqrt{2}}{8}$$

Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos\frac{\alpha}{2}$ và $\sin\frac{\alpha}{2}$ **đều dương**

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{6}} ; \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{6}}$$

Từ đó $\tan\frac{\alpha}{2} = 3 + 2\sqrt{2}$; $\cot\frac{\alpha}{2} = 3 - 2\sqrt{2}$.

Ví dụ 3: Không dùng máy, tính:

a) $A = \sin\frac{11\pi}{12}.\cos\frac{5\pi}{12}$ b) $B = \cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{3\pi}{7}.\cos\frac{5\pi}{7}$

Giải

a) $A = \sin\frac{11\pi}{12}.\cos\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right)$

$$= \sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4}(2-\sqrt{3})$$

b) Ta có: $\cos\frac{3\pi}{7} = -\cos\frac{4\pi}{7}, \cos\frac{5\pi}{7} = -\cos\frac{2\pi}{7}$, $\sin\frac{\pi}{7} = -\sin\frac{8\pi}{7}$

nên: $B.\sin\frac{\pi}{7} = \sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$

$$= \frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7} = \frac{1}{8}\sin\frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{8}\sin\frac{\pi}{7}.$$ **Do đó** $B = -\frac{1}{8}$.

Ví dụ 4: Không dùng máy, tính:

a) $\cos75^\circ\cos15^\circ$ và $\sin75^\circ\sin15^\circ$

b) $\cos75^\circ\sin15^\circ$ và $\sin75^\circ\cos15^\circ$

Giải

Áp dụng công thức biến đổi tích thành tổng:

a) $\cos75^\circ\cos15^\circ = \frac{1}{2}(\cos90^\circ + \cos60^\circ) = \frac{1}{4}$

$$\sin75^\circ\sin15^\circ = \cos15^\circ\cos75^\circ = \frac{1}{4}$$

b) $\cos75^\circ\sin15^\circ = \frac{1}{2}(\sin90^\circ - \sin60^\circ) = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

$\sin75^\circ\cos15^\circ = \frac{1}{2}(\sin90^\circ + \sin60^\circ) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$

Ví dụ 6: Không dùng máy, tính:

a) $A = \cos20^\circ.\cos40^\circ.\cos80^\circ$ b) $B = \cos10^\circ.\cos50^\circ.\cos70^\circ$

Giải

a) $A.\sin20^\circ = \sin20^\circ.\cos20^\circ.\cos40^\circ.\cos80^\circ$

$= \frac{1}{2}\sin40^\circ.\cos40^\circ.\cos80^\circ = \frac{1}{4}\sin80^\circ.\cos80^\circ$

$= \frac{1}{8}\sin160^\circ = \frac{1}{8}\sin20^\circ \Rightarrow A = \frac{1}{8}.$

b) $B = \cos10^\circ\cos50^\circ\cos70^\circ = \cos10^\circ[\frac{1}{2}(\cos120^\circ + \cos20^\circ)]$

$= -\frac{1}{4}\cos10^\circ + \frac{1}{2}\cos10^\circ\cos20^\circ = -\frac{1}{4}\cos10^\circ + \frac{1}{4}(\cos30^\circ + \cos10^\circ)$

$= \frac{1}{4}\cos30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$

Chú ý: $\sin20^\circ\sin40^\circ\sin80^\circ = \cos70^\circ\cos50^\circ\cos10^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}.$

Ví dụ 6: Không dùng máy, tính:

a) $A = \sin\frac{\pi}{16}.\sin\frac{3\pi}{16}.\sin\frac{5\pi}{16}.\sin\frac{7\pi}{16}$

b) $B = \sin6^\circ.\sin42^\circ.\sin66^\circ.\sin78^\circ$

Giải

a) $A = \sin\frac{\pi}{16}.\sin\frac{3\pi}{16}.\sin\frac{5\pi}{16}.\sin\frac{7\pi}{16}$

$= \sin\frac{\pi}{16}.\sin\frac{3\pi}{16}.\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{16}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{16}\right)$

$= \sin\frac{\pi}{16}.\sin\frac{3\pi}{16}.\cos\frac{3\pi}{16}.\cos\frac{\pi}{16} = \left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\sin\frac{3\pi}{8}\right)$

$= \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{8}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{8}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{16}$

b) Ta có: $\sin42^\circ = \cos48^\circ$, $\sin66^\circ = \cos24^\circ$, $\sin78^\circ = \cos12^\circ$ nên:

$B.\cos6^\circ = \sin6^\circ\cos6^\circ\cos12^\circ\cos24^\circ\cos48^\circ$

$= \frac{1}{2}\sin12^\circ\cos12^\circ\cos24^\circ\cos48^\circ = \frac{1}{4}\sin24^\circ\cos24^\circ\cos48^\circ = \frac{1}{8}\sin48^\circ\cos48^\circ$

$= \frac{1}{16}\sin96^\circ = \frac{1}{16}\cos6^\circ \Rightarrow B = \frac{1}{16}.$

Ví dụ 7: Không dùng máy, tính:

a) $A = \cos14^\circ + \cos134^\circ + \cos106^\circ$ b) $B = \cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5}$

Giải

a) $A = \cos14^\circ + \cos134^\circ + \cos106^\circ$

$= \cos14^\circ + 2\cos120^\circ \cos14^\circ = \cos14^\circ - \cos14^\circ = 0$

b) $B = \cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} = 2\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} = \frac{4\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}$

$= \frac{2\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\sin(\pi - \frac{4\pi}{5})}{2\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{1}{2}$

Ví dụ 8: Không dùng máy, tính:

a) $A = \frac{1}{\sin10^\circ} - 4\sin70^\circ$ b) $B = \cos\frac{\pi}{19} + \cos\frac{3\pi}{19} + \cos\frac{5\pi}{19} + ... + \cos\frac{17\pi}{19}$

Giải

a) $A = \frac{1}{\sin10^\circ} - 4\sin70^\circ = \frac{1}{\sin10^\circ} - 4\cos20^\circ$

$= \frac{1 - 4\sin10^\circ\cos20^\circ}{\sin10^\circ} = \frac{1 - 2(\sin30^\circ - \sin10^\circ)}{\sin10^\circ} = \frac{2\sin10^\circ}{\sin10^\circ} = 2$

b) $B.2\sin\frac{\pi}{19} = 2\sin\frac{\pi}{19}\cos\frac{\pi}{19} + 2\sin\frac{\pi}{19}\cos\frac{3\pi}{19} +$

$+ 2\sin\frac{\pi}{19}.\cos\frac{5\pi}{19} + ... + 2\sin\frac{\pi}{19}\cos\frac{17\pi}{19}$

$= \sin\frac{2\pi}{19} + \left(\sin\frac{4\pi}{19} - \sin\frac{2\pi}{19}\right) + \left(\sin\frac{6\pi}{19} - \sin\frac{4\pi}{19}\right) + ... + \left(\sin\frac{18\pi}{19} - \sin\frac{16\pi}{19}\right)$

$= \sin\frac{18\pi}{19} = \sin\frac{\pi}{19} \Rightarrow B = \frac{1}{2}$

Ví dụ 9: Không dùng máy, tính:

a) $A = \sin^4\frac{\pi}{16} + \sin^4\frac{3\pi}{16} + \sin^4\frac{5\pi}{16} + \sin^4\frac{7\pi}{16}$

b) $B = \cot7,5^\circ + \tan67,5^\circ - \tan7,5^\circ - \cot67,5^\circ$

Giải

a) $A = (\sin^4\frac{\pi}{16} + \cos^4\frac{\pi}{16}) + (\sin^4\frac{3\pi}{16} + \cos^4\frac{3\pi}{16})$

$= 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{16}\cos^2\frac{\pi}{16} + 1 - 2\sin^2\frac{3\pi}{16}.\cos^2\frac{3\pi}{16}$

$= 2 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\sin^2\frac{3\pi}{8} = 2 - \frac{1}{2}(\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8}) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

b) $B = \dfrac{\cos 7,5^\circ}{\sin 7,5^\circ} - \dfrac{\sin 7,5^\circ}{\cos 7,5^\circ} + \dfrac{\sin 67,5^\circ}{\cos 67,5^\circ} - \dfrac{\cos 67,5^\circ}{\sin 67,5^\circ}$

$= \dfrac{\cos^2 7,5^\circ - \sin^2 7,5^\circ}{\sin 7,5^\circ \cos 7,5^\circ} + \dfrac{\sin^2 67,5^\circ - \cos^2 67,5^\circ}{\sin 67,5^\circ \cos 67,5^\circ}$

$= \dfrac{\cos 15^\circ}{\frac{1}{2}\sin 15^\circ} - \dfrac{\cos 135^\circ}{\frac{1}{2}\sin 135^\circ} = \dfrac{2(\sin 135^\circ \cos 15^\circ - \cos 135^\circ \sin 15^\circ)}{\sin 15^\circ \sin 135^\circ}$

$= \dfrac{4\sin 120^\circ}{-(\cos 150^\circ - \cos 120^\circ)} = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = 6 + 2\sqrt{3}$.

Ví dụ 10: a) Cho $\cos 2\alpha = \dfrac{3}{5}$. Tính $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$.

b) Cho $\cos\alpha = -\dfrac{9}{11}$, $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$. Tính $\tan(\dfrac{\pi}{4} - \alpha)$.

Giải

a) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)$

$= \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = -\cos 2\alpha = -\dfrac{3}{5}$.

b) $\tan\alpha > 0 \Rightarrow \tan\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1} = \dfrac{2\sqrt{10}}{9}$

$\tan(\dfrac{\pi}{4} - \alpha) = \dfrac{1 - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha} = \dfrac{121 - 36\sqrt{10}}{41}$.

Ví dụ 11: a) Cho $\sin\alpha - \sin\beta = \dfrac{1}{3}$, $\cos\alpha - \cos\beta = \dfrac{1}{2}$. Tính $\cos(\alpha - \beta)$

b) Cho $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\cos\beta = -\dfrac{3}{4}$, $-\dfrac{3\pi}{2} < \beta < -\pi$

Tính $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$.

Giải

a) Ta có: $(\sin\alpha - \sin\beta)^2 = (\dfrac{1}{3})^2 \Rightarrow \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{9}$

$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 = (\dfrac{1}{2})^2 \Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{4}$

Cộng vế theo vế, ta được:

$1 + 1 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{13}{36} \Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = \dfrac{59}{72}$

b) Ta có $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos\alpha < 0$, $-\dfrac{3\pi}{2} < \beta < -\pi \Rightarrow \sin\beta > 0$.

Do đó: $\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\sqrt{1 - \dfrac{4}{9}} = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = -\sqrt{1-\frac{9}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$, nên

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{3\sqrt{5} - 2\sqrt{7}}{12}$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = -\frac{6 + \sqrt{35}}{12}$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \frac{3\sqrt{5} + 2\sqrt{7}}{12}$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \frac{-6 + \sqrt{35}}{12}$

Ví dụ 12: a) Cho a, b là các góc nhọn, $\sin a = \frac{3}{5}$; $\sin(a + b) = \frac{2}{3}$. Tính sinb.

b) Tính $\tan 2\alpha$ và $\tan 2\beta$, biết $\tan(\alpha + \beta) = 8$ và $\tan(\alpha - \beta) = 5$.

Giải

a) Ta có: $\sin^2(a + b) + \cos^2(a + b) = 1 \Rightarrow \cos(a + b) = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\sin b = \sin[(b + a) - a] = \sin(b + a)\cos a - \cos(b + a)\sin a$

$= \frac{2}{3}.\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{8 \pm 3\sqrt{5}}{15}$ (thoả mãn đầu bài).

b) $\tan 2\alpha = \tan[(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)]$

$= \frac{\tan(\alpha+\beta) + \tan(\alpha-\beta)}{1 - \tan(\alpha+\beta).\tan(\alpha-\beta)} = \frac{8+5}{1-8.5} = \frac{13}{-39} = \frac{-1}{3}$

Tương tự: $\tan 2\beta = \frac{8-5}{1+8.5} = \frac{3}{41}$.

Ví dụ 13: a) Cho $\cos\alpha + \cos\beta = a$. $\sin\alpha + \sin\beta = b$ và $a^2 + b^2 \neq 0$.
Tính $\sin(\alpha + \beta)$

b) Cho $\sin\alpha + \cos\alpha = C\sin(\alpha + \beta)$, $\forall\alpha$. Tính C và β.

Giải

a) $a = \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$b = \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

nên $ab = 2\sin(\alpha + \beta)\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$, $a^2 + b^2 = 4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$

Từ đó $\sin(\alpha + \beta) = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$

b) Phần thuận:Nếu có C và β để $\sin\alpha + \cos\alpha = C\sin(\alpha + \beta)$ với mọi α thì chọn

$\alpha = 0$, ta được $1 = C\sin\beta$, chọn $a = \frac{\pi}{2}$, ta được $1 = C\cos\beta$.

Từ đó $C \neq 0$, $\sin\beta = \cos\beta = \frac{1}{C}$.

Vậy hoặc $B = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) và $C = \sqrt{2}$

hoặc $B = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) và $C = -\sqrt{2}$. Thử lại đúng.

Cách khác: Dùng công thức biến đổi tổng thành tích, ta có $\forall\alpha$:

$\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha + \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = 2\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})\cos\frac{\pi}{4}$

$= \sqrt{2}\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$ và $\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha - \sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$

$= 2\cos\frac{3\pi}{4}\sin(\alpha - \frac{3\pi}{4}) = -\sqrt{2}\sin(\alpha - \frac{3\pi}{4})$.

Ví dụ 14: Quỹ đạo một vật được ném lên từ gốc O, vận tốc ban đầu là v(m/s), theo phương hợp với trục hoành Ox góc α, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ là parabol có phương trình $y = -\frac{g}{2v^2\cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x$, $g \approx 9{,}8$ (m/s^2).

a) Tính tầm xa. b) Khi v không đổi, tính giá trị lớn nhất của tầm xa. Áp dụng khi v = 80m/s.

Giải

a) Gọi x là tầm xa của quỹ đạo thì $x > 0$.

Cho $y = 0 \Leftrightarrow \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha} + (\tan\alpha)x = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{2v^2\sin\alpha\cos\alpha}{8} = \frac{v^2}{8}\sin 2\alpha$

b) Với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$: x đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\sin 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$. Khi đó $x = \frac{v^2}{g}$, với v = 80m/s thì $x = \frac{v^2}{g} \approx \frac{80^2}{9{,}8} \approx 653$ (m).

Ví dụ 15: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số:

a) $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x$ b) $y = a\sin x + b\cos x$ với $a^2 + b^2 \neq 0$.

c) $y = (\sin x - \cos x)(3\sin x - 4\cos x)$.

Giải

a) $y = 2(\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x) = 2\sin(x - \frac{\pi}{6})$

Vì $-1 \leq \sin(x - \frac{\pi}{6}) \leq 1$, $\forall x$ nên $-2 \leq y \leq 2$. Vậy maxy = 2, miny = –2.

b) $y = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.\cos x\right)$

Vì $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$: nên tồn tại góc φ

để $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$, nên:

$y=\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\varphi.\sin x+\sin\varphi.\cos x\right)=\sqrt{a^2+b^2}.\sin(x+\varphi)$

Vì $-1\le\sin(x+\varphi)\le 1$, $\forall x$ nên:

$\max y=\sqrt{a^2+b^2}$, $\min y=-\sqrt{a^2+b^2}$.

c) Ta có: $y=3\sin^2x-7\sin x\cos x+4\cos^2x$

$=3.\frac{1-\cos2x}{2}-7.\frac{1}{2}\sin2x+4.\frac{1+\cos2x}{2}=\frac{7}{2}-\frac{7}{2}\sin2x+\frac{1}{2}\cos2x$

Áp dụng câu b) thì có: $\max y=\frac{7+5\sqrt{2}}{2}$, $\min y=\frac{7-5\sqrt{2}}{2}$.

DẠNG 2: CHỨNG MINH HỆ THỨC VÀ BIẾN ĐỔI

– Vận dụng các công thức lượng giác, hệ thức cơ bản, các hằng đẳng thức để chứng minh hệ thức.

– Chú ý đến cung góc lượng giác, loại giá trị lượng giác và các hệ số khi biến đổi lượng giác, biến đổi thành tích số.

– Khi biến đổi dạng tổng, ta có thể ghép cặp để biến đổi thành tích, cũng có khi ta nhân thêm đại lượng $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ để biến đổi tích thành tổng.

Ví dụ 1: Chứng minh trong điều kiện có nghĩa thì:

a) $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$; $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})$

b) $\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$; $\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$

Giải

a) $\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha.\sin\frac{\pi}{4})$.

$=\sqrt{2}(\sin\alpha.\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos\alpha.\frac{\sqrt{2}}{2})=\sin\alpha+\cos\alpha$.

Tương tự thì có $\sqrt{2}\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})=\sin\alpha-\cos\alpha$.

b) $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}.\tan\alpha}=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$.

$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}.\tan\alpha}=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$.

Ví dụ 2: Chứng minh:

a) $\sin3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$; $\cos3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

b) $\sin\alpha.\sin(\frac{\pi}{3} - \alpha)\sin(\frac{\pi}{3} + \alpha) = \frac{1}{4}\sin3\alpha$

$\cos\alpha.\cos(\frac{\pi}{3} - \alpha)\cos(\frac{\pi}{3} + \alpha) = \frac{1}{4}\cos3\alpha$

Áp dụng tính: $\sin20^\circ.\sin40^\circ.\sin80^\circ$; $\tan20^\circ.\tan40^\circ.\tan80^\circ$

Giải

a) $\sin3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin2\alpha\cos\alpha + \cos2\alpha\sin\alpha$

$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + (1 - 2\sin^2\alpha)\sin\alpha = 2\sin\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \sin\alpha$

$= 2\sin\alpha(1 - 2\sin^2\alpha) + \sin\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$\cos3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos2\alpha\cos\alpha - 2\sin\alpha\sin\alpha$

$= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha = -\cos\alpha + 2\cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$

$= -\cos\alpha + 2\cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1) = 4\cos^3\alpha - 4\cos\alpha$

b) $\sin\alpha\sin(\frac{\pi}{3} - \alpha)\sin(\frac{\pi}{3} + \alpha) = \sin\alpha(\sin^2\frac{\pi}{3}\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\frac{\pi}{3})$

$= \sin\alpha(\frac{3}{4}\cos^2\alpha - \frac{1}{4}\sin^2\alpha) = \frac{\sin\alpha}{4}(3 - 4\sin^2\alpha)$

$= \frac{1}{4}(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha) = \frac{1}{4}\sin3\alpha$

$\cos\alpha\cos(\frac{\pi}{3} - \alpha)\cos(\frac{\pi}{3} + \alpha) = \cos\alpha(\cos^2\frac{\pi}{3}\cos^2\alpha - \sin^2\frac{\pi}{3}\sin^2\alpha)$

$= \cos\alpha(\frac{1}{4}\cos^2\alpha - \frac{3}{4}\sin^2\alpha) = \frac{\cos\alpha}{4}[\cos^2\alpha - 3(1 - \cos^2\alpha)]$

$= \frac{\cos\alpha}{4}(4\cos^2\alpha - 3) = \frac{1}{4}\cos3\alpha$

Áp dụng:

$\sin20^\circ\sin40^\circ\sin80^\circ = \sin20^\circ\sin(60^\circ - 20^\circ)\sin(60^\circ + 20^\circ)$

$= \frac{1}{4}\sin(3.20^\circ) = \frac{1}{4}\sin60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$

Tương tự, $\cos20^\circ\cos40^\circ\cos80^\circ = \frac{1}{4}\cos(3.20^\circ) = \frac{1}{8}$

Do đó $\tan20^\circ\tan40^\circ\tan80^\circ = \sqrt{3}$.

Ví dụ 3: Chứng minh trong điều kiện có nghĩa thì:

$$\tan(\frac{\pi}{3} - \alpha).\tan\alpha.\tan(\frac{\pi}{3} + \alpha) = \tan3\alpha$$

Áp dụng: Tính $\tan10^\circ.\tan50^\circ.\tan110^\circ$.

Giải

Ta có: $\tan(\frac{\pi}{3} - \alpha)\tan\alpha\tan(\frac{\pi}{3} + \alpha) = \frac{\sqrt{3} - \tan\alpha}{1 + \sqrt{3}\tan\alpha}\tan\alpha\frac{\sqrt{3} + \tan\alpha}{1 - \sqrt{3}\tan\alpha}$

$= \frac{3 - \tan^2\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}\tan\alpha$

$$\tan3\alpha=\frac{\tan2\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan2\alpha}=\frac{\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}+\tan\alpha}{1-\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\tan\alpha}=\frac{3-\tan^2\alpha}{1-3\tan^2\alpha}\tan\alpha \Rightarrow \text{đpcm}$$

Áp dụng: $\tan10^\circ.\tan50^\circ.\tan110^\circ = \tan(60^\circ - 50^\circ)\tan50^\circ\tan(60^\circ + 50^\circ)$

$= \tan150^\circ = -\tan30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Cách khác: Dùng ví dụ 2.

Ví dụ 4: Chứng minh:

a) $\sin^2(\frac{\pi}{8} + a) - \sin^2(\frac{\pi}{8} - a) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin2a$

b) $\cos^2\alpha + \cos^2(\alpha - \frac{\pi}{3}) + \cos^2(\frac{2\pi}{3} - \alpha) = \frac{3}{2}$

Giải

a) $\sin^2(\frac{\pi}{8} + a) - \sin^2(\frac{\pi}{8} - a)$

$= (\sin\frac{\pi}{8}\cos a + \sin a\cos\frac{\pi}{8})^2 - (\sin\frac{\pi}{8}\cos a - \sin a\cos\frac{\pi}{8})^2$

$= 4\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}\sin a\cos a = \sin\frac{\pi}{4}\sin2a = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin2a$

Cách khác: $\sin^2(\frac{\pi}{8} + a) - \sin^2(\frac{\pi}{8} - a)$

$= [\sin(\frac{\pi}{8} + a) + \sin(\frac{\pi}{8} - a)] . [\sin(\frac{\pi}{8} + a) - \sin(\frac{\pi}{8} - a)]$

$= (2\sin\frac{\pi}{8}\cos a).(2\cos\frac{\pi}{8}\sin a) = \sin\frac{\pi}{4}\sin2a = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin2a$

b) $\cos^2\alpha + \cos^2(\alpha - \frac{\pi}{3}) + \cos^2(\frac{2\pi}{3} - \alpha)$

$= \cos^2\alpha + (\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3} + \sin\alpha\sin\frac{\pi}{3})^2 + (\cos\frac{2\pi}{3}\cos\alpha + \sin\alpha\sin\frac{2\pi}{3})^2$

$= \cos^2\alpha + (\cos\alpha.\frac{1}{2} + \sin\alpha\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (-\frac{1}{2}.\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha)^2$

$= \cos^2\alpha + 2(\frac{1}{4}\cos^2\alpha + \frac{3}{4}\sin^2\alpha) = \frac{3}{2}(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \frac{3}{2}$.

Ví dụ 5: Chứng minh trong điều kiện có nghĩa thì:

a) $2\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \cos2\alpha$

b) $\sin\alpha(1 + \cos2\alpha) = \sin2\alpha\cos\alpha$

c) $\frac{1+\sin2\alpha-\cos2\alpha}{1+\sin2\alpha+\cos2\alpha} = \tan\alpha$ d) $\tan\alpha - \frac{1}{\tan\alpha} = -\frac{2}{\tan2\alpha}$

Giải

a) $2\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha) = 2[\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$

$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos2\alpha$

b) $\sin\alpha(1+\cos2\alpha) = \sin\alpha(1+2\cos^2\alpha-1) = 2\sin\alpha\cos^2\alpha = \sin2\alpha\cos\alpha$

c) $\frac{1+\sin2\alpha-\cos2\alpha}{1+\sin2\alpha+\cos2\alpha} = \frac{\sin2\alpha+(1-\cos2\alpha)}{\sin2\alpha+(1+\cos2\alpha)} = \frac{\sin2\alpha+2\sin^2\alpha}{\sin2\alpha+2\cos^2\alpha}$

$= \frac{2\sin\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}{2\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)} = \tan\alpha$

d) $\tan\alpha - \frac{1}{\tan\alpha} = 2.\frac{\tan^2\alpha-1}{2\tan\alpha} = -\frac{2}{\tan2\alpha}$

Ví dụ 6: Chứng minh trong điều kiện có nghĩa thì:

a) $\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$; $\tan\alpha - \tan\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

b) $\frac{1}{\cos\alpha\cos2\alpha} + \frac{1}{\cos2\alpha\cos3\alpha} + ... + \frac{1}{\cos7\alpha\cos8\alpha} = \frac{\tan8\alpha-\tan\alpha}{\sin\alpha}$

Giải

a) $\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

$\tan\alpha - \tan\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

b) Áp dụng câu a) ta có:

$\frac{1}{\cos\alpha\cos2\alpha} = \frac{\tan2\alpha-\tan\alpha}{\sin\alpha}$, $\frac{1}{\cos2\alpha\cos3\alpha} = \frac{\tan3\alpha-\tan2\alpha}{\sin\alpha}$

...

$\frac{1}{\cos7\alpha\cos8\alpha} = \frac{\tan8\alpha-\tan7\alpha}{\sin\alpha}$

Cộng vế với vế bảy đẳng thức trên thì vế trái bằng: $\frac{\tan8\alpha-\tan\alpha}{\sin\alpha}$ (đpcm).

Ví dụ 7: Chứng minh trong điều kiện có nghĩa thì:

a) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$

b) $\cos4a = 8\cos^4a - 8\cos^2a + 1$

Giải

a) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = (\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)(\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha)$

$= \sin^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\beta\cos^2\alpha = \sin^2\alpha(1-\sin^2\beta) - \sin^2\beta(1-\sin^2\alpha)$

$= \sin^2\alpha - \sin^2\beta = (1-\cos^2\alpha) - (1-\cos^2\beta) = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$

Cách khác: $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \frac{1}{2}(\cos2\beta - \cos2\alpha)$

$= \frac{1}{2}(2\cos^2\beta - 1 - 2\cos^2\alpha + 1) = \cos^2\beta - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha - \sin^2\beta.$

b) $\cos4a = \cos2.2a = 2\cos^2 2a - 1 = 2(2\cos^2a-1)^2 - 1 = 8\cos^4a - 8\cos^2a + 1.$

Ví dụ 8: Chứng minh:

a) Nếu $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$ và $\cos\alpha \neq \cos\beta$ thì $\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta} = -\sqrt{3}$

b) $\frac{\cos\alpha - \cos 7\alpha}{\sin 7\alpha - \sin\alpha} = \tan 4\alpha$ (điều kiện có nghĩa).

Giải

a) $\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta} = \frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} = -\cot\frac{\alpha+\beta}{2} = -\cot\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$

b) $\frac{\cos\alpha - \cos 7\alpha}{\sin 7\alpha - \sin\alpha} = \frac{2\sin 4\alpha \sin 3\alpha}{2\cos 4\alpha \sin 3\alpha} = \tan 4\alpha$

Ví dụ 9: Chứng minh:

a) $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{\sin 10^0} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^0} = 4$

Giải

a) Đặt $A = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$. Ta có:

$A\sin\frac{\pi}{7} = \cos\frac{2\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$

$= \frac{1}{2}\left(\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\right) + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7}\right) + \frac{1}{2}\left(\sin\alpha - \sin\frac{5\pi}{7}\right) = -\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{7}$.

Do đó $A = -\frac{1}{2}$.

Cách khác: Nhân 2 vế với $\sin\frac{2\pi}{7}$.

b) $\frac{1}{\sin 10^0} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^0} = \frac{\cos 10^0 - \sqrt{3}\sin 10^0}{\sin 10^0 \cos 10^0}$

$= \frac{2(\cos 60^0 \cos 10^0 - \sin 60^0 \sin 10^0}{\sin 10^0 \cos 10^0}$

$= \frac{2\cos(60^0 + 10^0)}{\frac{1}{2}\sin 20^0} = \frac{4\cos 70^0}{\sin 20^0} = \frac{4\cos 70^0}{\cos 70^0} = 4$

Ví dụ 10: Chứng minh:

a) $\cos\alpha\sin(\beta - \gamma) + \cos\beta\sin(\gamma - \alpha) + \cos\gamma\sin(\alpha - \beta) = 0$

b) $\cos(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) + \cos(\beta + \gamma)\sin(\beta - \gamma) + \cos(\gamma + \alpha)\sin(\gamma - \alpha) = 0$.

Giải

a) $\cos\alpha\sin(\beta - \gamma) = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta - \gamma) - \sin(\alpha - \beta + \gamma)]$.

$\cos\beta\sin(\gamma - \alpha) = \frac{1}{2}[\sin(\beta + \gamma - \alpha) - \sin(\beta - \gamma + \alpha)]$.

$\cos\gamma\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}[\sin(\gamma+\alpha-\beta)-\sin(\gamma-\alpha+\beta)]$.

Cộng vế với vế ba đẳng thức, ta được điều cần chứng minh.

b) $\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}(\sin2\alpha-\sin2\beta)$

$\cos(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma)=\frac{1}{2}(\sin2\beta-\sin2\gamma)$

$\cos(\gamma+\alpha)\sin(\gamma-\alpha)=\frac{1}{2}(\sin2\gamma-\sin2\alpha)$

Cộng vế với vế ba đẳng thức, ta được điều cần chứng minh.

Ví dụ 11: Cho $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Chứng minh:

a) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$

b) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$

c) $\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

d) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

Giải

a) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\sin\alpha+2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$

$=2\sin\alpha+\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$

$=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right)=2\cos\frac{\alpha}{2}\left[\sin\frac{\pi-(\beta+\gamma)}{2}+\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right]$

$=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\beta+\gamma}{2}+\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right)=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$

b) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\cos\alpha+2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$

$=\cos\alpha+2\cos\frac{\pi-\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$

$=1+2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)$

$=1+2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\sin\frac{\pi-(\beta+\gamma)}{2}\right]$

$=1+2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\right)=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

c) $\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma=\sin2\alpha+2\sin(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)$

$=2\sin\alpha[\cos(\beta-\gamma)+\cos\alpha]=2\sin\alpha[\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)]$

$=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

d) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \cos^2\alpha \cdot \frac{1+\cos 2\beta}{2} + \frac{1+\cos 2\gamma}{2}$

$= \cos^2\alpha + 1 + \frac{1}{2}(\cos 2\beta + \cos 2\gamma) = \cos^2\alpha + 1 + \cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma).$

$= \cos^2\alpha + 1 - \cos\alpha\cos(\beta-\gamma) = 1 + \cos\alpha[\cos\alpha - (\cos(\beta-\gamma)].$

$= 1 - \cos\alpha[\cos(\beta+\gamma) + \cos(\beta-\gamma)] = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$

Ví dụ 12: Chứng minh trong điều kiện có nghĩa thì:

a) $\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\alpha.\cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha}$; $\cot(\alpha-\beta) = \frac{\cot\alpha.\cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}$

b) $\frac{3\cot^2 15^\circ - 1}{3 - \cot^2 15^\circ} = -\cot 15^\circ.$

Giải

a) Ta có: $\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cos\beta}$

Chia cả tử và mẫu của biểu thức cho $\sin\alpha\sin\beta$ ta được:

$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\alpha.\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$. Tương tự: $\cot(\alpha-\beta) = \frac{\cot\alpha.\cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}$

b) Áp dụng câu a) $\frac{3\cot^2 15^\circ - 1}{3 - \cot^2 15^\circ} = \frac{\cot^2 30^\circ \cot^2 15^\circ - 1}{\cot^2 30^\circ - \cot^2 15^\circ}$

$= \frac{\cot^2 30^\circ \cot 15^\circ + 1}{\cot 30^\circ - \cot 15^\circ} \cdot \frac{\cot 30^\circ \cot 15^\circ - 1}{\cot 30^\circ - \cot 15^\circ}$

$= \cot(15^\circ - 30^\circ)\cot(15^\circ + 30^\circ) = -\cot 15^\circ.$

Ví dụ 13: Chứng minh:

a) Nếu $\sin(2a+b) = 3\sin b$ thì $\tan(a+b) = 2\tan a$

b) Nếu $\cos(a+b) = 0$ thì $\sin(a+2b) = \sin a$

c) Nếu $\sin a = A\sin(a+b)$ thì $\tan(a+b) = \frac{\sin b}{\cos b - A}$

với $a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $\cos b \neq A$.

Giải

a) $\sin(2a+b) = 3\sin b \Rightarrow \sin[(a+b)+a] = 3\sin[(a+b)-a].$

$\Rightarrow \sin(a+b)\cos a + \sin a\cos(a+b)$

$= 3[\sin(a+b)\cos a - \sin a\cos(a+b)]$

$\Rightarrow 4\sin a\cos(a+b) = 2\sin(a+b)\cos a$

$\Rightarrow \tan(a+b) = 2\tan a$ (với điều kiện có nghĩa).

b) $\sin(a+2b) - \sin a = 2\cos(a+b)\sin b = 0$

vì $\cos(a+b) = 0$. Vậy $\sin(a+2b) = \sin a$.

c) $\sin a = A\sin(a+b) \Rightarrow \sin[(a+b)-b] = A\sin(a+b)$

$\Rightarrow \sin(a+b)\cos b - \sin b\cos(a+b) = A\sin(a+b)$

$\Rightarrow [\sin(a+b)](\cos b - A) = \sin b\cos(a+b)$

$\Rightarrow \tan(a+b) = \frac{\sin b}{\cos b - A}$, (với điều kiện có nghĩa).

Ví dụ 14: Chứng minh trong điều kiện có nghĩa thì:

a) $\tan a + \tan b + \tan c = \tan a\tan b\tan c + \dfrac{\sin(a+b+c)}{\cos a\cos b\cos c}$

b) $\sin a + \sin b + \sin c = 4\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{b+c}{2}\sin\dfrac{c+a}{2} + \sin(a+b+c)$

Giải

a) $\sin(a+b+c) = \sin[(a+b)+c] = \sin(a+b)\cos c + \cos(a+b)\sin c$

$= (\sin a\cos b + \cos a\sin b)\cos c + (\cos a\cos b - \sin a\sin b)\sin c$

$= \sin a\cos b\cos c + \sin b\cos c\cos a + \sin c\cos a\cos b - \sin a\sin b\sin c.$

Do đó: $\dfrac{\sin(a+b+c)}{\cos a\cos b\cos c} = \dfrac{\sin a}{\cos a} + \dfrac{\sin b}{\cos b} + \dfrac{\sin c}{\cos c} - \dfrac{\sin a\sin b\sin c}{\cos a\cos b\cos c}$

$= \tan a + \tan b + \tan c - \tan a\tan b\tan c \Rightarrow$ đpcm.

b) $\sin a + \sin b + \sin c - \sin(a+b+c)$

$= 2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2} - 2\cos\dfrac{a+b+2c}{2}\sin\dfrac{a+b}{2}$

$= 2\sin\dfrac{a+b}{2}\left(\cos\dfrac{a-b}{2} - \cos\dfrac{a+b+2c}{2}\right) = 4\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{b+c}{2}\sin\dfrac{c+a}{2} \Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 15: Cho $a \neq k2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Chứng minh:

a) $S = \sin a + \sin 2a + \sin 3a + ... + \sin na = \dfrac{\sin\dfrac{na}{2}\sin\dfrac{(n+1)a}{2}}{\sin\dfrac{a}{2}}$

b) $T = \cos a + \cos 2a + \cos 3a + ... + \cos na = \dfrac{\sin\dfrac{na}{2}\cos\dfrac{(n+1)a}{2}}{\sin\dfrac{a}{2}}$

Giải

a) Nhân hai vế cho $2\sin\dfrac{a}{2} \neq 0$, ta được:

$2S\sin\dfrac{a}{2} = 2\sin\dfrac{a}{2}\sin a + 2\sin\dfrac{a}{2}\sin 2a + ... + 2\sin\dfrac{a}{2}\sin na$

$= \left(\cos\dfrac{a}{2} - \cos\dfrac{3a}{2}\right) + \left(\cos\dfrac{3a}{2} - \cos\dfrac{5a}{2}\right) + ... + \cos\left(n-\dfrac{1}{2}\right)a - \cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)a$

$= \cos\dfrac{a}{2} - \cos\left(n-\dfrac{1}{2}\right)a = 2\sin\dfrac{na}{2}\sin\dfrac{(n+1)a}{2}$

Suy ra: $S = \dfrac{\sin\dfrac{na}{2}\sin\dfrac{(n+1)a}{2}}{\sin\dfrac{a}{2}}$.

b) Tương tự, nhân 2 vế cho $\sin\dfrac{a}{2}$ thì có đpcm.

ABC

Ví dụ 13: Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc α

a) $P = 4(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) - \cos4\alpha$

b) $Q = 8(\cos^8\alpha - \sin^8\alpha) - \cos6\alpha - 7\cos2\alpha$.

Giải

a) $P = 4[(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha] - \cos4\alpha$

$= 4(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha) - 1 + 2\sin^2 2\alpha = 3$: không phụ thuộc α.

b) $Q = 8(\cos^4\alpha - \sin^4\alpha)(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha) - \cos6\alpha - 7\cos2\alpha$

$= 8(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)[(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha]$
$- \cos6\alpha - 7\cos2\alpha$

$= 8\cos2\alpha(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha) - \cos6\alpha - 7\cos2\alpha$

$= \cos2\alpha - 4\cos2\alpha\sin^2 2\alpha - \cos(4\alpha + 2\alpha)$

$= \cos2\alpha - 2\sin4\alpha\sin2\alpha - \cos4\alpha\cos2\alpha + \sin4\alpha\sin2\alpha$

$= \cos2\alpha - (\cos4\alpha\cos2\alpha + \sin4\alpha\sin2\alpha)$

$= \cos2\alpha - \cos2\alpha = 0$: không phụ thuộc α.

Ví dụ 17: Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc biến:

a) $A = \sin^2 x + \sin^2(\frac{\pi}{3} - x) + \sin x.\sin(\frac{\pi}{3} - x)$

b) $B = \sin5x - 2\sin x(\cos4x + \cos2x) - \sin x$

Giải

a) $A = \sin^2 x + \sin(\frac{\pi}{3} - x)\,[\sin(\frac{\pi}{3} - x) + \sin x]$

$= \sin^2 x + 2\sin(\frac{\pi}{3} - x)\sin\frac{\pi}{6}\cos(\frac{\pi}{6} - x) = \sin^2 x + \sin(\frac{\pi}{3} - x)\cos(\frac{\pi}{6} - x)$

$= \sin^2 x + \frac{1}{2}[\sin(\frac{\pi}{2} - 2x) + \sin\frac{\pi}{6}]$

$= \sin^2 x + \frac{1}{2}\cos2x + \frac{1}{4} = \sin^2 x + \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 x) + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

b) $B = \sin5x - 2\sin x\cos4x - 2\sin x\cos2x - \sin x$

$= \sin5x - (\sin5x - \sin3x) - (\sin3x - \sin x) - \sin x = 0$

Ví dụ 18: Chứng minh biểu thức không phụ thuộc biến x:

a) $A = \sin4x.\sin10x - \sin11x.\sin3x - \sin7x\sin x$

b) $B = \cos^2(\alpha + x) + \cos^2 x - 2\cos\alpha\cos x\cos(\alpha + x)$

c) $C = \sin6x\cot3x - \cos6x$.

Giải

a) Ta có: $\sin4x\sin10x = \frac{1}{2}(\cos6x - \cos14x)$

$\sin11x\sin3x = -\frac{1}{2}(\cos14x - \cos8x)$, $\sin7x\sin x = -\frac{1}{2}(\cos8x - \cos6x)$

Cộng vế theo vế thì $A = 0$ không phụ thuộc x.

b) $B = \cos(\alpha + x)[\cos(\alpha + x) - 2\cos\alpha\cos x] + \cos^2 x$

$= \cos(\alpha + x)(-\cos\alpha\cos x - \sin\alpha\sin x) + \cos^2 x$

$= -\cos(\alpha + x)\cos(\alpha - x) + \cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2x) + \cos^2 x$

$= \frac{1}{2}\cos 2\alpha - \frac{\cos 2x}{2} + \cos^2 x = -\frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{2}$

$= \sin^2\alpha$, không phụ thuộc vào x.

c) $C = 2\sin 3x \cos 3x.\frac{\cos 3x}{\sin 3x} - (2\cos^2 3x - 1)$

$= 2\cos^2 3x - 2\cos^2 3x + 1 = 1$, không phụ thuộc x.

Ví dụ 19: Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc α, β

a) $M = \left(\cot\frac{\alpha}{3} - \tan\frac{\alpha}{3}\right)\tan\frac{2\alpha}{3} - \tan\beta.\tan\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)$

b) $N = (\tan\alpha - \tan\beta)\cot(\alpha - \beta) - \tan\alpha\tan\beta$.

Giải

a) $M = \left(\frac{\cos\frac{\alpha}{3}}{\sin\frac{\alpha}{3}} - \frac{\sin\frac{\alpha}{3}}{\cos\frac{\alpha}{3}}\right)\frac{\sin\frac{2\alpha}{3}}{\cos\frac{2\alpha}{3}} + \tan\beta.\cot\beta$

$= \frac{\cos^2\frac{\alpha}{3} - \sin^2\frac{\alpha}{3}}{\sin\frac{\alpha}{3}\cos\frac{\alpha}{3}}.\frac{\sin\frac{2\alpha}{3}}{\cos\frac{2\alpha}{3}} + 1 = \frac{\cos\frac{2\alpha}{3}}{\frac{1}{2}\sin\frac{2\alpha}{3}}.\frac{\sin\frac{2\alpha}{3}}{\cos\frac{2\alpha}{3}} + 1 = 3$

b) $N = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{\tan(\alpha - \beta)} - \tan\alpha\tan\beta$

$= 1 + \tan\alpha\tan\beta - \tan\alpha\tan\beta = 1$: không phụ thuộc α, β.

Ví dụ 20: Tìm $a \in (0; \pi)$ để mỗi biểu thức sau không phụ thuộc x:

a) $S = \sin x + \sin(x + a) + \sin(x + 2a) + \sin(x + 3a) + \sin(x + 4a)$

b) $T = \cos x + \cos(x + a) + \cos(x + 2a) + ... + \cos(x + 5a)$.

Giải

a) Nhân S cho $\sin\frac{a}{2} \neq 0$, ta tính được: $S = \frac{\sin\frac{5a}{2}\sin(x + 2a)}{\sin\frac{a}{2}}$

S không phụ thuộc x khi $\sin\frac{5a}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{5a}{2} = k\pi \Leftrightarrow a = \frac{k2\pi}{5}$

Vì $0 < a < \pi$ nên $a = \frac{2\pi}{5}$ hoặc $a = \frac{4\pi}{5}$.

b) Tương tự, nhân T cho $\sin\frac{a}{2} \neq 0$ thì: $T = \frac{\sin 3a\cos\left(x + \frac{5a}{2}\right)}{\sin\frac{a}{2}}$

T không phụ thuộc x khi $\sin 3a = 0 \Leftrightarrow 3a = k\pi \Leftrightarrow a = \frac{k\pi}{3}$

Vì $0 < a < \pi$ nên $a = \frac{\pi}{3}$ hoặc $a = \frac{2\pi}{3}$.

Ví dụ 21: Đơn giản biểu thức:

$A = \sin(\frac{\pi}{3} + \alpha) - \sin(\frac{\pi}{3} - \alpha)$, $B = \cos^2(\frac{\pi}{4} + \alpha) - \cos^2(\frac{\pi}{4} - \alpha)$

Giải

$A = \sin(\frac{\pi}{3} + \alpha) - \sin(\frac{\pi}{3} - \alpha) = 2\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha = \sin\alpha$

$B = [\cos(\frac{\pi}{4} + \alpha) + \cos(\frac{\pi}{4} - \alpha)]\,[(\cos(\frac{\pi}{4} + \alpha) - \cos(\frac{\pi}{4} - \alpha)]$

$= 2\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha\,(-2\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha) = -2\sin\alpha\cos\alpha = -\sin 2\alpha.$

Ví dụ 22: Rút gọn các biểu thức

$$A = \frac{\sin 2\alpha + \sin\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos\alpha} \qquad B = \frac{4\sin^2\alpha}{1 - \cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$C = \frac{1 + \cos\alpha - \sin\alpha}{1 - \cos\alpha - \sin\alpha} \qquad D = \frac{1 + \sin\alpha - 2\sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{4\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Giải

$$A = \frac{\sin\alpha(2\cos\alpha + 1)}{2\cos^2\alpha + \cos\alpha} = \frac{\sin\alpha(2\cos\alpha + 1)}{\cos\alpha(2\cos\alpha + 1)} = \tan\alpha$$

$$B = \frac{16\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} = 16\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$C = \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right)} = -\cot\frac{\alpha}{2}$$

$$D = \frac{\sin\alpha + \cos(90^\circ - \alpha)}{4\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha + \sin\alpha}{4\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{4\cos\frac{\alpha}{2}} = \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Ví dụ 23: Đơn giản các biểu thức sau:

a) $A = \left(1 + \frac{1}{\cos 2x}\right).\left(1 + \frac{1}{\cos 4x}\right)...\left(1 + \frac{1}{\cos 2^n x}\right)$

b) B = tanxtan2x + tan2xtan3x + ... + tan(n – 1)xtannx

Giải

a) Nếu sinx = 0 thì A = (1 + 1)(1 + 1)...(1 + 1) = 2^n

Nếu sinx ≠ 0 thì

$$A = \frac{1+\cos 2x}{\cos 2x}.\frac{1+\cos 4x}{\cos 4x}...\frac{1+\cos 2^n x}{\cos 2^n x}$$

$$= \frac{2\cos^2 x}{\cos 2x}.\frac{2\cos^2 2x}{\cos 4x}...\frac{2\cos^2 2^{n-1}x}{\cos 2^n x}$$

$$= \frac{2^n \cos^2 x.\cos 2x.\cos 4x...\cos 2^{n-1}x}{\cos(2^n x)}$$

$$= \cot x.2^n.\frac{\sin x\cos x.\cos 2x\cos 4x...\cos 2^{n-1}x}{\cos(2^n x)}$$

$$= \cot x.\frac{\sin 2^n x}{\cos(2^n x)} = \cot x.\tan(2^n x).$$

b) Nếu tanx = 0 thì x = kπ (k ∈ **Z**)

⇒ tanx = tan2x = ... = tannx = 0 ⇒ B = 0

Nếu tanx ≠ 0 (x ≠ kπ, k ∈ **Z**)

Trong điều kiện tanx, tan2x, ..., tan(nx) có nghĩa ta có:

$$\tan x = \tan(2x - x) = \frac{\tan 2x - \tan x}{1 + \tan x\tan 2x}$$

$$\Rightarrow 1 + \tan x.\tan 2x = \frac{\tan 2x - \tan x}{\tan x}$$

Tương tự: $1 + \tan 2x.\tan 3x = \frac{\tan 3x - \tan 2x}{\tan x}$, ...

$$1 + \tan(n-1)x.\tan(nx) = \frac{\tan x - \tan(n-1)x}{\tan x}$$

Cộng vế ta có: (n – 1) + B = cotx.(tannx – tanx)⇒ B = cotx.tannx – n

Ví dụ 24: Biến đổi thành tổng:

a) A = 2sin(a + b)cos(a + b) b) B = 2cos(a + b)cos(a – b)

c) C = 4sin 3x sin2x sinx d) D = 4sin3x sin2x cosx

Giải

a) A = sin2a + sin2b

b) B = cos2a + cos2b

c) C = 2sin3x(– cos3x + cosx) = –2sin3xcos3x + 2sin3xcosx = –sin6x + sin2x + sin4x

d) D = 2sin3x(sin3x + sinx) = $2\sin^2 3x$ + 2sin3xsinx = 1 – cos6x + cos2x – cos4x.

Ví dụ 25: Biến đổi thành tích

a) A = sina + sinb + sin(a + b) b) B = cosa + cosb + cos(a + b) + 1

c) C = 1 + sina + cosa d) D = sinx + sin3x + sin5x + sin7x

Giải

$$a)\ A = 2\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2} + 2\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a+b}{2}$$

$$= 2\sin\frac{a+b}{2}.\left(\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2}\right) = 4\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}$$

b) $B = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + 2\cos^2\frac{a+b}{2}$

$= 2\cos\frac{a+b}{2}\left(\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2}\right) = 4\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}$

c) $C = 1 + \cos a + \sin a = 2\cos^2\frac{a}{2} + 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}$

$= 2\cos\frac{a}{2}(\cos\frac{a}{2} + \sin\frac{a}{2}) = 2\sqrt{2}\cos\frac{a}{2}\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2})$

d) $D = (\sin 7x + \sin x) + (\sin 5x + \sin 3x)$

$= 2\sin 4x\cos 3x + 2\sin 4x\cos x = 2\sin 4x(\cos 3x + \cos x)$

$= 4\sin 4x \cos 2x \cos x$

Ví dụ 26:

a) Cho $a > 0, b > 0, a + b = 60^\circ$. Chứng minh $3\tan a.\tan b \le 1$

b) Cho ΔABC. Chứngminh $1 + \frac{1}{2}x^2 \ge \cos A + x(\cos B + \cos C)$, $\forall x$.

Giải

a) BĐT $\Leftrightarrow \frac{3\sin a\sin b}{\cos a\cos b} \le 1 \Leftrightarrow \frac{3\cos(a-b) - \frac{3}{2}}{\cos(a-b) + \frac{1}{2}} \le 1$

Vì $a > 0, b > 0, a + b = 60^\circ \Rightarrow 1 \ge \cos(a-b) > \frac{1}{2}$ nên:

BĐT $\Leftrightarrow 3\cos(a-b) - \frac{3}{2} < \cos(a-b) + \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2\cos(a-b) \le 2 \Leftrightarrow \cos(a-b) \le 1$: Đúng.

b) BĐT $\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - (\cos B + \cos C)x + 1 - \cos A \ge 0$.

Vế trái là tam thức bậc hai f(x) có hệ số $\frac{1}{2} > 0$ và:

$\Delta = (\cos B + \cos C)^2 - 2(1 - \cos A) = 4\sin^2\frac{a}{2}\left(\cos^2\frac{B-C}{2} - 1\right) \le 0$

Do đó $f(x) \ge 0$, $\forall x$ (đpcm)

Ví dụ 27: Chứng minh rằng:

a) $\frac{8}{3\cos x + \cos 3x} + 3\cos^2 x \ge 5$ với $0 \le x < \frac{\pi}{2}$

b) $\sqrt{\cos^2 x + 2\sin^2 x} + \sqrt{\sin^2 x + 2\cos^2 x} \le \sqrt{6}$, $\forall x$.

Giải

a) Ta có: $3\cos x + \cos 3x = 3\cos x + 4\cos^3 x - 3\cos x = 4\cos^3 x$

Do $0 \le x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Côsi:

$\frac{1}{\cos^3 x} + \frac{1}{\cos^3 x} + \cos^2 x + \cos^2 x + \cos^2 x \ge 5\sqrt[5]{\frac{1}{\cos^6 x}.(\cos^2 x)^3} = 5$

nên $\frac{2}{\cos^3 x} + 3\cos^2 x \geq 5 \Rightarrow \frac{8}{3\cos x + \cos 3x} + 3\cos^2 x \geq 5$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

b) Ta có: $|a.c + b.d| \leq \sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{c^2+d^2}$

$\Leftrightarrow (a.c + b.d)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

$\Leftrightarrow a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 \leq a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \Leftrightarrow a^2d^2 - 2abcd + b^2d^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (ad - bc)^2 \geq 0$: Đúng. Dấu = xảy ra khi ad = bc.

Áp dụng:

$VT = 1.\sqrt{\cos^2 x + 2\sin^2 x} + 1.\sqrt{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$

$\leq \sqrt{(1^2+1^2)(\cos^2 x + 2\sin^2 x + \sin^2 x + 2\cos^2 x)} = \sqrt{6}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \cos^2 x + 2\sin^2 x = \sin^2 x + 2\cos^2 x$.

$\Leftrightarrow \sin^2 x = \cos^2 x \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$.

C. BÀI LUYỆN TẬP

1. Tính các giá trị lượng giác của các cung góc sau:

a) -15° b) 105° c) $\frac{11\pi}{12}$ d) $-\frac{5\pi}{12}$

2. Tính:

a) $A = \cos(-53^\circ)\sin(-337^\circ) + \sin(307^\circ)\sin(113^\circ)$

b) $B = \frac{\tan 225^0 - \cot 81^0.\cot 69^0}{\cot 261^0 + \tan 201^0}$

ĐS: a) $A = -\frac{1}{2}$ b) $B = \sqrt{3}$

3. Cho α, β là các góc nhọn với $\sin\alpha = \frac{8}{17}$; $\tan\beta = \frac{5}{12}$.

Tính $\sin(\alpha - \beta)$; $\cos(\alpha + \beta)$; $\tan(\alpha - \beta)$.

HD: tính trước $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$

4. Cho $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ và $\tan\alpha\tan\beta = 3 - 2\sqrt{2}$

a) Tính $\tan\alpha + \tan\beta$ b) Tính góc α, β.

5. Chứng minh :

a) $\tan 75^0 + \cot 75^0 = 4$

b) $\cos a + \cos(120^0 + a) + \cos(120^0 - a) = 0$

6. Chứng minh:

a) $\cos(a + b).\cos(a - b) = \cos^2 b - \sin^2 a = \cos^2 a - \sin^2 b$

b) $\sin^2(a + b) - \sin^2 a - \sin^2 b = 2\sin a.\sin b.\cos(a + b)$

7. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

a) $A = \cos^2 x - 2\sin a.\cos x.\sin(a + x) + \sin^2(a + x)$

b) $B = \sin^2 x + \cos(\frac{\pi}{3} - x).\cos(\frac{\pi}{3} + x)$

ĐS: a) $A = \cos^2 a$ b) $B = \frac{1}{4}$

ABC

8. Biến đổi thành tích :

$I = \cos x - \sqrt{3}.\sin x$; $J = a.\sin x + b.\cos x$

9. Rút gọn các biểu thức sau:

$A = \sin 4x.\cot 2x - \cos 4x$

$B = \tan x + \tan(x + \frac{\pi}{3}) + \tan(x + \frac{2\pi}{3})$

10. Tính các giá trị lượng giác của góc:

a) $\frac{\pi}{8}$ b) $\frac{\pi}{12}$ c) $\frac{\pi}{16}$ d) $\frac{\pi}{2^n}$

11. Cho $\sin x = 4\cos x$. Tính các giá trị lượng giác góc $2x$

12. Cho $\tan\alpha = \frac{1}{2}$, $\tan\beta = -\frac{1}{3}$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ < \beta < 180^\circ$.

Tính $\sin(\alpha - 2\beta)$; $\cos(2\alpha + \beta)$

13. Tính: $A = \sin\frac{\pi}{16}.\cos\frac{\pi}{16}.\cos\frac{\pi}{8}$ $B = \cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}$

$C = \sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ$

ĐS: $A = \sqrt{2}/8$

14. Tính: $I = \sin^6\frac{\pi}{24} + \cos^6\frac{\pi}{24}$ $J = \tan^2\frac{\pi}{12} + \tan^2\frac{3\pi}{12} + \tan^2\frac{5\pi}{12}$

ĐS: $I = \frac{10 + 3\sqrt{3}}{16}$

15. Tính các giá trị lượng giác của góc 18°

HD: $\sin 3.18^0 = \cos 2.18^0$

16. Cho $\tan\frac{x}{2} = 7$. **Tính** $\frac{\tan x - \sin x}{\tan x + \sin x}$

17. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\cos^3 x.\sin x - \sin^3 x.\cos x = \frac{\sin 4x}{4}$

b) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{\cos 4x + 3}{4}$

c) $\sin 5a = 16\sin^5 a - 20\sin^3 a + 5\sin a$

18. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\tan\frac{x}{2}(\frac{1}{\cos x} + 1) = \tan x$ b) $\frac{1 + \sin x}{\cos x} = \cot(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$

19. Rút gọn các biểu thức sau:

$P = \frac{2}{\sin 4x} - \cot 2x$ $Q = \frac{\sin^2 2x - 4\sin^2 x}{\sin^2 2x + 4\sin^2 x - 4}$

ĐS: $P = \tan 2x$, $Q = 2\tan^4 x$

20. Đơn giản các biểu thức:

$A = \cos x.\cos 2x.\cos 4x \ldots \cos 2^n x$

$B = \sqrt{2 + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{2 + 2\cos\alpha}}$, n căn, $0 \le \alpha \le \pi$

21. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

$A = \sin^2 x + \sin^2 (120^0+x) + \sin^2 (120^0-x)$

$B = \dfrac{\cos^3 x - \cos 3x}{\cos x} + \dfrac{\sin^3 x + \sin 3x}{\sin x}$

ĐS: $A = \dfrac{3}{2}$, $B = 3$

22. Tìm m để biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

$K = \sin^6 x + \cos^6 x + m(\sin^4 x + \cos^4 x) + 2\sin^2 2x$

ĐS: $m = \dfrac{5}{2}$

23. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

a) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

b) $y = a.\sin^2 x + b.\cos x \sin x + c.\cos^2 x$

HD: đưa về dạng A.sinu + B.cosu

24. Biến đổi thành tổng:

a) $\sin (a + 30^o).\cos (a - 30^o)$

b) $\sin\dfrac{\pi}{5}.\sin\dfrac{2\pi}{5}$

c) $2\sin x.\sin 2x.\sin 3x$

d) $\sin 18^0.\cos 22^0.\cos 10^0$

25. Biến đổi thành tổng:

a) $\sin a.\cos^2 a$

b) $\sin^3 a.\cos^2 b$

HD: dùng công thức hạ bậc hai, bậc ba

26. Biến đổi thành tích:

a) $\sin x - \sqrt{3}\cos x + 2\cos y$

b) $\cos 46^o - \cos 22^o - 2\cos 78^o$

c) $1 + \sin x - \cos 2x$

d) $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x$

HD: ghép nhóm rồi dùng công thức biến đổi

27. Biến đổi thành tích:

a) $\cos 8a + 4\cos 4a + 3$

b) $\tan^3 x - \tan^2 x - 3\tan x + 3$

c) $\sin x \cos 3x + \sin 4x \cos 2x$

d) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x - 1$

28. Biến đổi thành tích:

a) $\dfrac{\sin x + \sin 4x + \sin 7x}{\cos x + \cos 4x + \cos 7x}$

b) $\sin a + \sin b + \sin c - \sin(a + b + c)$

29. Chứng minh các đẳng thức:

a) $\cos x - \dfrac{1}{2}\cos 3x - \dfrac{1}{2}\cos 5x = 8\sin^2 x.\cos^3 x$

b) $\dfrac{\sin(a-b)}{\cos a.\cos b} + \dfrac{\sin(b-c)}{\cos b.\cos c} + \dfrac{\sin(c-a)}{\cos c.\cos a} = 0$

c) $\sin x (1 + 2\cos 2x + 2\cos 4x + 2\cos 6x) = \sin 7x$

30. Chứng minh:

a) $\tan 30^o + \tan 40^o + \tan 50^o + \tan 60^o = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}\cos 20^o$

b) $\cos 12^0 + \cos 18^0 - 4\cos 15^0.\cos 21^0.\cos 24^0 = -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

31. Chứng minh trong điều kiện có nghĩa:

a) Nếu $\tan\alpha.\tan\beta = 1$ thì $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$, $\cos 2\alpha = -\cos 2\beta$

ABC

b) Nếu $\sin x + \sin y = 2\sin(x+y)$, $x, y \neq k\pi$ thì $\tan\frac{x}{2}\tan\frac{y}{2} = \frac{1}{3}$

32. Chứng minh, trong điều kiện có nghĩa:

a) Nếu $\cos c = \cos a.\cos b$ thì $\tan\frac{c+a}{2}\tan\frac{c-a}{2} = \tan^2\frac{b}{2}$

b) Nếu $\frac{\sin(x-\alpha)}{\sin(x-\beta)} = \frac{a}{b}$, $\frac{\cos(x-\alpha)}{\cos(x-\beta)} = \frac{A}{B}$ thì $\cos(\alpha-\beta) = \frac{aA+bB}{aB+bA}$

33. Tính giá trị của biểu thức :

a) $A = \frac{\cos 2a - \cos 4a}{\sin 4a - \sin 2a}$ khi $a = 20^\circ$ b) $B = \frac{\cos a.\cos 13a}{\cos 3a + \cos 5a}$ khi $a = \frac{\pi}{17}$

ĐS: a) $A = \sqrt{3}$ b) $B = -\frac{1}{2}$

34. Tính:

$E = \cos\frac{\pi}{65}.\cos\frac{2\pi}{65}.\cos\frac{4\pi}{65}.\cos\frac{8\pi}{65}.\cos\frac{16\pi}{65}.\cos\frac{32\pi}{65}$

$F = \sin^4\frac{\pi}{16} + \sin^4\frac{3\pi}{16} + \sin^4\frac{5\pi}{16} + \sin^4\frac{7\pi}{16}$

35. Tính:

$M = \sin^3 18^\circ + \sin^2 18^\circ$ $N = \tan\frac{\pi}{18}\tan\frac{7\pi}{18}\tan\frac{13\pi}{18}$

$I = \tan^6 20^\circ - 33\tan^4 20^\circ + 27\tan^2 20^\circ - 3$, $J = \sin\frac{\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{5\pi}{7}$

ĐS: $I = 0$, $J = \frac{\sqrt{7}}{2}$

36. Đơn giản các biểu thức:

$A = 8 + 4\tan\frac{\pi}{8} + 2\tan\frac{\pi}{16} + \tan\frac{\pi}{32} - \cot\frac{\pi}{32}$

$B = \sin^3\frac{a}{3} + 3\sin^3\frac{a}{3^2} + 3^2\sin^3\frac{a}{3^3} + \ldots + 3^{n-1}\sin\frac{a}{3^n}$

37. Tính tổng:

$A = \cos 75^\circ + \cos 15^\circ$ $B = \cos 85^\circ + \cos 35^\circ - \cos 25^\circ$

$C = \tan 75^\circ - \tan 15^\circ$ $D = \tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ$

$E = 2\sin 2^\circ + 4\sin 4^\circ + 6\sin 6^\circ + \ldots + 180\sin 180^\circ$

38. Tính các tổng:

$D = \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 2^2 x} + \frac{1}{\sin 2^3 x} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^n x}$

$E = \frac{1}{\cos a.\cos 2a} + \frac{1}{\cos 2a.\cos 3a} + \ldots + \frac{1}{\cos na.\cos(n+1)a}$

$F = \frac{1}{\sin a.\sin 2a} + \frac{1}{\sin 2a.\sin 3a} + \ldots + \frac{1}{\sin na.\sin(n+1)a}$

39. Chứng minh:

a) $\cos 3x.\sin^3 x + \sin 3x.\cos^3 x = \frac{3\sin 4x}{4}$

b) $\frac{1}{16} + \frac{1}{32}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{32}\cos 6x = \sin^2 x \cos^4 x$

d) $128(\sin^{10}x + \cos^{10}x) = 5\cos 8x + 60\cos 4x + 63$

40. Chứng minh nếu $x + y + z + t = 2\pi$ thì :

$\cos^2 x + \cos^2 y - \cos^2 z - \cos^2 t = 2\sin(x + z).\sin(y + z).\cos(z + t)$

41. Chứng minh nếu $\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos(x+\varphi)}{b} = \frac{\cos(x+2\varphi)}{c} = \frac{\cos(x+3\varphi)}{d}$ thì

$\frac{a+c}{b} = \frac{b+d}{c}$.

42. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

$A = \sin 8x + 2\cos^2(45^o + 4x)$

$B = \sin^4 x + \sin^4(x + \frac{\pi}{4}) + \sin^4(x + \frac{\pi}{2}) + \sin^4(x + \frac{3\pi}{4})$

$C = \tan x.\tan(x+\frac{\pi}{3}) + \tan(x+\frac{\pi}{3})\tan(x+\frac{2\pi}{3}) + \tan(x+\frac{2\pi}{3})\tan x$

$D = \sin 4x.\sin 10x - \sin 11x.\sin 3x - \sin 7x.\sin x$

43. Chứng minh nếu $m\sin(a + b) = \cos(a - b), a - b \neq k\pi$ và $|m| \neq 1$ thì

$M = \frac{1}{1 - m\sin 2a} + \frac{1}{1 - m\sin 2b}$ độc lập với a và b.

44. Chứng minh:

a) $\sin\frac{\pi}{11} + \sin\frac{2\pi}{11} + ... + \sin\frac{10\pi}{11} = \cot\frac{\pi}{22}$

b) $\cos\alpha + \cos(\alpha + \frac{\pi}{5}) + \cos(\alpha + \frac{2\pi}{5}) + \cos(\alpha + \frac{9\pi}{5}) = 0$

45. Chứng minh bất đẳng thức:

a) $\frac{\sin x + \sin y}{2} \leq \sin\frac{x+y}{2}, 0 < x < \pi, 0 < y < \pi$

b) $\frac{\tan x + \tan y}{2} \geq \tan\frac{x+y}{2}, 0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{2}$

HD: dùng công thức biến đổi và chú ý dấu thừa số

46. Chứng minh :

a) Nếu $|\sin x| = |k.\sin y|$, $|k| \leq 1$ thì $\sin(x + y).\sin(x - y) \leq 0$

b) Nếu $\tan\alpha = n.\tan\beta$, $n > 0$ thì $\tan^2(\alpha - \beta) \leq \frac{(n-1)^2}{4n}$

§4. ỨNG DỤNG LƯỢNG GIÁC

DẠNG 1. BÀI TOÁN TAM GIÁC

Qui ước: Cho tam giác ABC gọi 3 cạnh a, b, c đối diện với 3 góc A, B, C, tương ứng 3 đường cao h_a, h_b,h_c , 3 trung tuyến m_a, m_b, m_c, 3 phân giác d_a, d_b, d_c hay l_a, l_b, l_c bán kính đường tròn nội tiếp r, ngoại tiếp R và nửa chu vi $p = \frac{(a+b+c)}{2}$.

- Điều kiện A , B , C là ba góc một tam giác là $\begin{cases} A, B, C > 0 \\ A+B+C = \pi \end{cases}$ nên có

$A + B = \pi - C$, $\frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$,...

- Phối hợp các hệ thức cơ bản, công thức lượng giác để chứng minh hệ thức.

- Bài toán dạng loại tam giác, đưa về đánh giá quan hệ góc, cạnh, giá trị góc,... của tam giác cân, vuông, đều,...

Chú ý:

- Những hệ thức về tam giác dưới đây thường được sử dụng làm nền tảng để chứng minh các kết quả khác.

- Các định lí về tam giác ABC

Định lí sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

nên có $a = 2R \sin A$; $b = 2R \sin B$; $c = 2R \sin C$

Định lí cosin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$, $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca.\cos B$,

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$ nên có $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$; $\cos C = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$;

$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

Định lí diện tích: $S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}ab.\sin C = \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Các hệ thức phân giác $\ell_A = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$,... , trung tuyến

$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$, $m_a = AM = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$,...

Ví dụ 1: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta luôn có

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

Giải

$$VT = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin(A+B)$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\cdot 2\cos\frac{\frac{A-B}{2}+\frac{A+B}{2}}{2}\cos\frac{\frac{A-B}{2}-\frac{A+B}{2}}{2}$$

$$= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = VP.$$

Ví dụ 2: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta luôn có

$$\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C.$$

Giải

$$VT = \frac{1+\cos 2A}{2} + \frac{1+\cos 2B}{2} + \cos^2(A+B)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + \cos^2(A+B)$$

$$= 1 + \cos(A+B)\cos(A-B) + \cos^2(A+B)$$

$$= 1 + \cos(A+B)[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$$

$$= 1 - \cos C.\ 2\cos A.\ \cos(-B)$$

$$= 1 - 2\cos A\cos B\cos C = VP.$$

Ví dụ 3: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta luôn có

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C.$$

Giải

Vì $\sin 2C = \sin 2(\pi - (A+B)) = \sin(2\pi - 2(A+B))$

$= \sin(-2(A+B)) = -\sin 2(A+B)$ nên

$$VT = 2\sin(A+B)\cos(A-B) - \sin 2(A+B)$$

$$= 2\sin(A+B)[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

$$= 2\sin C.\ (-2)\sin A.\ \sin(-B)$$

$$= 4\sin A\sin B\sin C = VP.$$

Ví dụ 4: Chứng minh trong tam giác ABC không vuông ta luôn có

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C.$$

Giải

Ta có $A + B = \pi - C$, nên

$$\tan(A+B) = \tan(\pi - C) \Leftrightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B} = -\tan C$$

$$\Leftrightarrow \tan A + \tan B = -\tan C(1 - \tan A\tan B)$$

$$\Leftrightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C : đpcm.$$

Ví dụ 5: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta luôn có

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1.$$

Giải

Ta có : $\tan(\frac{A}{2}+\frac{B}{2})=\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2})=\cot\frac{C}{2} \Leftrightarrow \frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$

$\Leftrightarrow \tan\frac{C}{2}(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2})=1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$

$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$: đpcm.

Ví dụ 6: Chứng minh trong mọi tam giác ta luôn có

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}=\frac{1}{2}(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}).$$

Giải

Từ $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$ thì chứng minh được

$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$.

Nên VP $=\frac{1}{2}(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2})$

$=\frac{1}{2}(\tan\frac{A}{2}+\cot\frac{A}{2})+\frac{1}{2}(\tan\frac{B}{2}+\cot\frac{B}{2})+\frac{1}{2}(\tan\frac{C}{2}+\cot\frac{C}{2})$

$=\frac{1}{2}\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$

$=\frac{1}{2}\frac{2}{\sin A}+\frac{1}{2}\frac{2}{\sin B}+\frac{1}{2}\frac{2}{\sin C}=$ VT.

Ví dụ 7: Chứng minh trong mọi tam giác ta luôn có

$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}+\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}=2.$$

Giải

Ta có $\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}+\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{\frac{1}{2}\sin A+\frac{1}{2}\sin B}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$

$=\frac{\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}=1+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}.$

ABC

và $\dfrac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} = \dfrac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} = \dfrac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}$

$= 1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} \Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 8: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta luôn có

$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$

$= \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}$.

Giải

Ta có $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$ (1).

và $1 = \sin\frac{\pi}{2} = \sin[(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}) + \frac{C}{2}]$

$= \sin(\frac{A}{2} + \frac{B}{2})\cos\frac{C}{2} + \cos(\frac{A}{2} + \frac{B}{2})\sin\frac{C}{2}$

$= (\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2})\cos\frac{C}{2} + (\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2})\sin\frac{C}{2}$

$= \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

Suy ra

$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$= 1 + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Ví dụ 9: Cho tam giác ABC. Chứng minh $\dfrac{\sin(A-B)}{\sin C} = \dfrac{a^2-b^2}{c^2}$

Giải

Áp dụng định lí sin :

$VT = \dfrac{(2R\sin A)^2 - (2R\sin B)^2}{(2R\sin C)^2} = \dfrac{4R^2(\sin^2 A - \sin^2 B)}{4R^2.\sin^2 C}$

$= \dfrac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin^2 C} = \dfrac{\cos 2B - \cos 2A}{2\sin^2 C} = \dfrac{-2\sin(B+A)\sin(B-A)}{2\sin^2 C}$

$= \dfrac{\sin C.\sin(A-B)}{\sin^2 C} = VT.$

Ví dụ 10: Trong tam giác ABC biết $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} = \frac{1}{3}$. Chứng minh $c = \frac{1}{2}(a+b)$.

Giải

Ta có $c = \frac{1}{2}(a + b) \Leftrightarrow 2\sin C = \sin A + \sin B$

$\Leftrightarrow 2\sin(A + B) = 2\sin\frac{A + B}{2}\cos\frac{A - B}{2}$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A + B}{2}\cos\frac{A + B}{2} = \sin\frac{A + B}{2}\cos\frac{A - B}{2} \Leftrightarrow 2\cos\frac{A+B}{2} = \cos\frac{A - B}{2}$

$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} \Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} = \frac{1}{3}.$

Ví dụ 11: Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta có

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$$

Giải

Ta có $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$

Tương tự $\cot B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S}$ và $\cot C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}$

Thế vào VT thì được đpcm.

Ví dụ12: Chứng minh rằng trong tam giác ABC bất kì ta có

$$\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2} = \frac{h_a - 2r}{h_a} = \frac{h_a}{2r_a + h_a}.$$

Giải

Ta có $h_a = \frac{2S}{a}$; $r = \frac{2S}{p}$; $2r_a = \frac{2S}{p - a}$ nên

$$\frac{h_a - 2r}{h_a} = \frac{h_a}{2r_a + h_a} = \frac{p - a}{p} = \frac{b + c - a}{b + c + a}$$

$$= \frac{\sin B + \sin C - \sin A}{\sin B + \sin C + \sin A} = \frac{\sin B + \sin C - \sin(B + C)}{\sin B + \sin C + \sin(B + C)}$$

$$= \frac{2\sin\frac{B + C}{2}\cos\frac{B - C}{2} - 2\sin\frac{B + C}{2}\cos\frac{B + C}{2}}{2\sin\frac{B + C}{2}\cos\frac{B - C}{2} + 2\sin\frac{B + C}{2}\cos\frac{B + C}{2}}$$

$$= \frac{2\sin\frac{B + C}{2}\left(\cos\frac{B - C}{2} - \cos\frac{B + C}{2}\right)}{2\sin\frac{B + C}{2}\left(\cos\frac{B - C}{2} + \cos\frac{B + C}{2}\right)}$$

$$= \frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}.$$

Ví dụ 13: Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta có

$$S = \frac{1}{4}(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A)$$

Giải

$VP = \frac{1}{4}8R^2(\sin^2 A\sin B\cos B + \sin^2 B\sin A\cos A)$

$= 2R^2\sin A\sin B(\sin A\cos B + \sin B\cos A)$

$= \frac{1}{2}(2R\sin A)(2R\sin B)\sin(A + B) = \frac{1}{2}ab\sin C = S = VT.$

Ví dụ 14: Cho tam giác ABC. Chứng minh

$$bc.\cot\frac{A}{2} + ca.\cot\frac{B}{2} + ab.\cot\frac{C}{2} = 4Rp^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{3}{p}\right).$$

Giải

Ta có $VP = 4Rp^2(\frac{p-a}{ap} + \frac{p-b}{bp} + \frac{p-c}{cp})$

$= 4R\frac{p(p-a)}{a} + 4R\frac{p(p-b)}{b} + 4R\frac{p(p-c)}{c}$

$= bc\frac{R}{abc}(a + b + c)(b + c - a) + ca\frac{R}{abc}(a + b + c)(c + a - b)$

$+ ab\frac{R}{abc}(a + b + c)(a + b - c).$

và $\frac{R}{abc}(a + b + c)(b + c - a)$

$= \frac{(\sin A + \sin B + \sin C)(\sin B + \sin C - \sin A)}{2\sin A\sin B\sin C}$

$= \frac{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{16\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}} = \cot\frac{A}{2}$

Từ đó suy ra đpcm.

Ví dụ 15: Chứng minh với mọi tam giác ABC, ta có

$$1 + \frac{r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C$$

Giải

Ta có $\cos A + \cos B + \cos C = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1$ nên đề bài tương đương $1 + \frac{r}{R} = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

ABC

hay $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$. Ta có

$$VT = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}bc\sin A}{\frac{1}{2}(a+b+c)} = \frac{4R^2\sin A\sin B\sin C}{2R(\sin A+\sin B+\sin C)}$$

$$= 2R\frac{8\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = VP.$$

Ví dụ 16: Chứng minh với mọi tam giác ABC ta có

$a\cot A + b\cot B + c\cot C = 2(R + r)$.

Giải

$$VT = a\frac{\cos A}{\sin A} + b\frac{\cos B}{\sin B} + c\frac{\cos C}{\sin C}$$

$$= 2R(\cos A + \cos B + \cos C) = 2R\left(1 + \frac{r}{R}\right) = VP.$$

Ví dụ 17: Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có $r + r_a + r_b - r = 4R\cos C$.

Giải

$$VT = (p-c)\tan\frac{C}{2} + p\tan\frac{A}{2} + p\tan\frac{B}{2} - p\tan\frac{C}{2}$$

$$= -c.\tan\frac{C}{2} + p\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}\right)$$

$$= -2R\sin C\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}} + 2R\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{2}\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}$$

$$= 2R\left(-2\sin^2\frac{C}{2}\right) + 2R.2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}$$

$$= 4R\left(\cos^2\frac{C}{2} - \sin^2\frac{C}{2}\right) = 4R\cos C = VP.$$

Ví dụ 18: Chứng minh trong mọi tam giác ta có

$$\frac{\cos\frac{A}{2}}{\ell_A} + \frac{\cos\frac{B}{2}}{\ell_B} + \frac{\cos\frac{C}{2}}{\ell_C} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Giải

Từ $\ell_A = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c} \Rightarrow \frac{\cos\frac{A}{2}}{\ell_A} = \frac{b+c}{2bc} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$.

ABC

Tương tự , $\frac{\cos\frac{B}{2}}{\ell_B} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$; $\frac{\cos\frac{C}{2}}{\ell_C} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

Cộng vế theo vế của 3 đẳng thức thì được đpcm.

Ví dụ 19: Chứng minh trong mọi tam giác ta có

$$bc.\cos^2\frac{A}{2} + ca.\cos^2\frac{B}{2} + ab.\cos^2\frac{C}{2} = p^2$$

Giải

$$VT = \frac{1}{2}bc(1+\cos A) + \frac{1}{2}ca(1+\cos B) + \frac{1}{2}ab(1+\cos C)$$

$$= \frac{1}{2}(bc+ca+ab) + \frac{1}{2}bc\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{1}{2}ca\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} + \frac{1}{2}\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$= \frac{1}{4}(a+b+c)^2 = p^2 = VP.$$

Ví dụ 20: Chứng minh với ABC là tam giác bất kì: $\cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8}$

Giải

Bất đẳng thức đề bài tương đương với

$$\frac{1}{2}[\cos(A-B)+\cos(A-B)][-\cos(A+B)] \le \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(A+B) + \cos(A-B)\cos(A+B) + \frac{1}{4} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(A+B) + \cos(A-B)\cos(A+B) + \frac{1}{4}\cos^2(A-B) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2(A-3) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow [\cos(A+B) + \frac{1}{2}\cos(A-B)]^2 + \frac{1}{4}\sin^2(A-B) \ge 0 : \text{đúng.}$$

Ví dụ 21: Chứng minh với ABC là tam giác bất kì: $1 < \cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$.

Giải

Ta có $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} > 1.$

và $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\cos^2\left(\frac{A+B}{2}\right) + 1 \le \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{A+B}{2}\right) - \cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \frac{1}{4} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow [\cos\frac{A+B}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}]^2 + \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{A-B}{2}\right) \ge 0 : \text{đpcm.}$$

Ví dụ 22: Chứng minh với ABC là tam giác bất kì :

a) $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$

Giải

a) Để ý rằng với $-\frac{\pi}{2}\le x, y\le\frac{\pi}{2}$ thì $\frac{\cos x+\cos y}{2}\le\cos\frac{x+y}{2}$,

nên: $\frac{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}}{2}+\frac{\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{\pi}{6}}{2}\le\frac{\cos\frac{A}{2}+\frac{B}{2}}{2}+\frac{\cos\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6}}{2}$

$\le\frac{\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6}}{4}$

Từ đó suy ra đpcm.

b) Áp dụng bất đẳng thức Côsi và kết quả trên thì

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\le\left(\frac{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}{3}\right)^3\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Ví dụ 23: Chứng minh với ABC là tam giác bất kì : $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\le\frac{\sqrt{3}}{9}$.

Giải

Ta có $\tan\frac{A}{2},\tan\frac{B}{2},\tan\frac{C}{2}>0$ và $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi :

$$1=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}$$

$$\ge 3\sqrt[3]{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}}=3\sqrt[3]{\tan^2\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}}.$$

Suy ra đpcm.

Ví dụ 24: Chứng minh với ABC là tam giác bất kì: $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C\ge\frac{3}{4}$.

Giải

Bất đẳng thức đề bài tương đương

$$\frac{1}{2}(1+\cos2A)+\frac{1}{2}(1+\cos2B)+\cos^2C\ge\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}(\cos2A+\cos2B)+\cos^2(A+B)+\frac{1}{4}\ge0$$

$$\Leftrightarrow\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos^2(A+B)+\frac{1}{4}\ge0$$

$$\Leftrightarrow\left[\cos(A+B)+\frac{1}{2}\cos(A-B)\right]^2+\frac{1}{4}\sin^2(A+B)\ge0$$: đpcm.

Ví dụ 25: Chứng minh nếu A , B , C là ba góc của một tam giác thì

$$\cos^3\frac{A}{3} + \cos^3\frac{B}{3} + \cos^3\frac{C}{3} \le \frac{3}{8} + \frac{3}{4}\left(\cos\frac{A}{3} + \cos\frac{B}{3} + \cos\frac{C}{3}\right)$$

Giải

Bất đẳng thức tương đương với

$$\left(4\cos^3\frac{A}{3} - 3\cos\frac{A}{3}\right) + \left(4\cos^3\frac{B}{3} - 3\cos\frac{B}{3}\right) + \left(4\cos^3\frac{C}{3} - 3\cos\frac{C}{3}\right) \le \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(2\cos\frac{A+B}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{A-B}{2} \ge 0 : \text{đúng.}$$

Ví dụ 26: Chứng minh với tam giác ABC thì

$$a^2(1 - \sqrt{3}\cot A) + b^2(1 - \sqrt{3}\cot B) + c^2(1 - \sqrt{3}\cot C) \ge 0.$$

Giải

Bất đẳng thức tương đương với

$$(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - \sqrt{3}(\sin A\cos A + \sin B\cos B + \sin C\cos C) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \ge \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \ge 2\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C. \quad (1)$$

Sử dụng bất đẳng thức Côsi và bất đẳng thức $\sin A\sin B\sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \ge 3\sqrt[3]{(\sin A\sin B\sin C)^2}$$

$$= \frac{3(\sin A\sin B\sin C)}{\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}} \ge \frac{3\sin A\sin B\sin C}{\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}}{8}}} = 2\sqrt{3}\ \sin A\sin B\sin C \text{ nên (1) đúng}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 27: Tính 3 góc của tam giác ABC biết $\sqrt{3}\cos A + 2\cos B + 2\sqrt{3}\cos C = 4$

Giải

Từ giả thiết, ta có

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 2 + \sqrt{3}\cos(B + C) - 2\cos B - 2\sqrt{3}\cos C = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\sin^2 B + \frac{3}{2}\sin^2 C - \sqrt{3}\sin B\sin C\right) + \left(\frac{1}{2}\cos^2 B + \frac{3}{2}\cos^2 C + 2\right.$$

$$\left. + \sqrt{3}\cos B\cos C - 2\cos B - 2\cos C - 2\sqrt{3}\cos C\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin B - \sqrt{3}\sin C)^2 + \frac{1}{2}(\cos B + \sqrt{3}\cos C - 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin B - \sqrt{3}\sin C = 0 \text{ và } \cos B + \sqrt{3}\cos C - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow A = 90^0 ; B = 60^0 ; C = 30^0.$$

Ví dụ 28: Tính các góc của tam giác ABC, biết rằng

$$\begin{cases} A > B > C & (1) \\ \cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1 & (2) \\ \sin 5A + \sin 5B + \sin 5C = 0 & (3) \end{cases}$$

Giải

Từ (1) suy ra $A > \frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2} > B > 0$; $\frac{\pi}{3} > C > 0$

$\Rightarrow \frac{3\pi}{2} > \frac{3A}{2} > \frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{4} > \frac{3B}{2} > 0$; $\frac{\pi}{2} > \frac{3C}{2} > 0$

do đó $\sin\frac{3B}{2} > 0$; $\sin\frac{3C}{2} > 0$, nên từ (2) suy ra

$\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2}\sin\frac{3C}{2} = 0 \Rightarrow \sin\frac{3A}{2} = 0 \Rightarrow A = \frac{k2\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$

chọn $A = \frac{2\pi}{3}$. Và từ (3) thì $\cos\frac{5A}{2}\cos\frac{5B}{2}\cos\frac{5C}{2} = 0$.

Vì $A = \frac{2\pi}{3}$ nên $\cos\frac{5A}{2} \neq 0$ và $B + C = \frac{\pi}{3}$.

mà $B > C$ nên $\frac{\pi}{6} > C > 0 \Rightarrow \cos\frac{5C}{2} > 0$, do đó

$\cos\frac{5B}{2} = 0 \Rightarrow B = \frac{\pi}{5} + \frac{k2\pi}{5}$ suy ra được $B = \frac{\pi}{5}$ và $C = \frac{2\pi}{15}$.

Ví dụ 29: Tính 3 góc của tam giác ABC biết

$$\sin^3\frac{A}{2} + \sin^3\frac{B}{2} + \sin^3\frac{C}{2} = \frac{3r}{4R}.$$

Giải

Ta có $\frac{r}{R} = \frac{\frac{S}{p}}{R} = \frac{abc}{4R^2p} = \frac{abc}{2R^2(a+b+c)}$

$= \frac{\sin A \sin B \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi

$$\sin^3\frac{A}{2} + \sin^3\frac{B}{2} + \sin^3\frac{C}{2} \geq 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{3r}{4R}.$$

do đó dấu bằng xảy ra nên tam giác ABC đều: $A = B = C = 60^0$.

Ví dụ 30: Các góc A , B , C của tam giác ABC thỏa mãn

$$\sin A + \sin B + \sin C - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = 2\sin\frac{C}{2}.$$

Chứng minh rằng $C = 120^0$.

Giải

Ta có $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ nên

$4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = 2\cos\frac{A+B}{2}$

$= 2(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2})$

do đó $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}(2\cos\frac{C}{2} - 1) = 0$

Vì $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} > 0$ nên $\cos\frac{C}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 120^0$.

Ví dụ 31: Cho tam giác ABC thỏa $\cos C(\sin A + \sin B) = \sin C.\cos(A - B)$. Hãy tính $\cos A + \cos B$.

Giải

Theo giả thiết thì có

$2\cos C \sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}(2\cos^2\frac{A-B}{2} - 1)$

$\Rightarrow \cos C.\cos\frac{A-B}{2} = \sin\frac{C}{2}.(2\cos^2\frac{A-B}{2} - 1)$

$\Rightarrow (1 - 2\sin^2\frac{C}{2}).\cos\frac{A-B}{2} = \sin\frac{C}{2}.(2\cos^2\frac{A-B}{2} - 1)$

$\Rightarrow \cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C}{2} = 2\sin^2\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos^2\frac{A-B}{2}$

$= 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}(\sin\frac{C}{2} + \cos\frac{A-B}{2})$

Vì $\sin\frac{C}{2} + \cos\frac{A-B}{2} \neq 0$ nên $2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2} = 1$

hay $2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = 1$, do đó $\cos A + \cos B = 1$.

Ví dụ 32: Cho tam giác ABC tùy ý. Tìm giá trị lớn nhất của

$$M = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C}.$$

Giải

Ta có $M + 1 = \dfrac{3}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C}$

nên $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \dfrac{3}{M+1}$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + \cos^2 C = \frac{3}{M+1}$$

$$\Rightarrow \cos^2 C - \cos(A-B)\cos C + 1 - \frac{3}{M+1} = 0$$

Vế trái là phương trình bậc hai theo cosC , phương trình này có nghiệm nên $\Delta = \cos^2(A-B) - 4(1 - \frac{3}{M+1}) \geq 0$

$$\Rightarrow 4(1 - \frac{3}{M+1}) \leq \cos^2(A-B) \leq 1 \Rightarrow M \leq 3.$$

Dấu " = " xảy ra khi $\cos^2(A-B) = 1$ và $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ tam giác ABC đều.

Vậy max M = 3.

Ví dụ 33: Cho tam giác ABC tùy ý. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = \frac{\sqrt[3]{\sin A} + \sqrt[3]{\sin B} + \sqrt[3]{\sin C}}{\sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}} + \sqrt[3]{\cos\frac{B}{2}} + \sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}}}.$$

Giải

Ta chứng minh: với mọi $x, y \geq 0$,: $x + y \leq \sqrt[3]{4(x^3 + y^3)}$.

Thật vậy, BĐT $\Leftrightarrow (x+y)^3 \leq 4(x^3+y^3) \Leftrightarrow (x+y)(x-y)^2 \geq 0$: đúng.

Áp dụng $\sqrt[3]{\sin A} + \sqrt[3]{\sin B} \leq \sqrt[3]{4(\sin A + \sin B)}$

$$= 2\sqrt[3]{\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}} = 2\sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}}.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi A = B.

Tương tự ,

$\sqrt[3]{\sin B} + \sqrt[3]{\sin C} \leq 2\sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}}$. Dấu " = " xảy ra khi B = C.

$\sqrt[3]{\sin C} + \sqrt[3]{\sin A} \leq 2\sqrt[3]{\cos\frac{B}{2}}$. Dấu " = " xảy ra khi C = A.

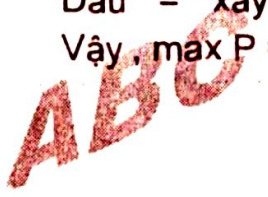
Do đó:

$$\sqrt[3]{\sin A} + \sqrt[3]{\sin B} + \sqrt[3]{\sin C} \leq \sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}} + \sqrt[3]{\cos\frac{B}{2}} + \sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}}$$

$$\text{nên } P = \frac{\sqrt[3]{\sin A} + \sqrt[3]{\sin B} + \sqrt[3]{\sin C}}{\sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}} + \sqrt[3]{\cos\frac{B}{2}} + \sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}}} \leq 1.$$

Dấu " = " xảy ra khi tam giác ABC đều.

Vậy , max P = 1 , khi tam giác ABC đều.



Ví dụ 34: Tam giác ABC thỏa mãn $\frac{\sin C}{\sin B} = 2\cos A$. Chứng minh tam giác ABC cân.

Giải

Đẳng thức đã cho tương đương với :

$\sin C = 2\cos A\sin B \Leftrightarrow \sin(A + B) = 2\sin B\cos A$

$\Leftrightarrow \sin A\cos B + \sin B\cos A = 2\sin B\cos A$

$\Leftrightarrow \sin A\cos B - \sin B\cos A = 0$

$\Leftrightarrow \sin(A - B) = 0 \Leftrightarrow A - B = k\pi.$

Vì A , B là góc tam giác nên $k = 0 \Rightarrow A = B.$

Vậy, tam giác thỏa điều kiện đã cho là tam giác cân.

Ví dụ 35: Chứng minh rằng tam giác ABC có các góc thỏa mãn điều kiện $\sin\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2} = \sin\frac{B}{2}\cos^3\frac{A}{2}$ thì tam giác đó cân.

Giải

Từ giả thiết thì

$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos^3\frac{A}{2}} = \frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos^3\frac{B}{2}} \Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}\left(1 + \tan^2\frac{A}{2}\right) = \tan\frac{B}{2}\left(1 + \tan^2\frac{B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\tan\frac{A}{2} - \tan\frac{B}{2}\right)\left(\tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + 1\right) = 0$$

Vì $\tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + 1$

$$= \left(\tan\frac{A}{2} + \frac{1}{2}\tan\frac{B}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\tan^2\frac{B}{2} + 1 > 0$$

nên $\tan\frac{A}{2} = \tan\frac{B}{2} \Rightarrow \frac{A}{2} = \frac{B}{2} + k\pi \Rightarrow A = B + k2\pi.$

Vì là góc của một tam giác nên $k = 0$. Suy ra $A = B$.

Vậy tam giác thỏa tính chất đã cho là tam giác cân.

Ví dụ 36: Xét dạng tam giác ABC tthỏa mãn $\tan A + \tan B = 2\cot\frac{C}{2}$

Giải

Đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{\sin(A + B)}{\cos A\cos B} = 2\tan\frac{A + B}{2} \Leftrightarrow 2\sin\frac{A + B}{2}\cos\frac{A + B}{2} = 2\frac{\sin\frac{A + B}{2}}{\cos\frac{A + B}{2}}\cos A\cos B$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{A + B}{2}\right) = \cos A\cos B$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[1 + \cos(A + B)] = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

$\Leftrightarrow \cos(A - B) = 1 \Leftrightarrow A - B = 0 \Leftrightarrow A = B.$

Vậy tam giác ABC cân tại C.

Ví dụ 37: Xét dạng tam giác ABC : $\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A + \sin B - \sin C} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2}$.

Giải

Hệ thức đã cho tương đương với

$$\frac{\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right)}{\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)} = \cot\frac{A}{2}.\cot\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}} = \cot\frac{A}{2}.\cot\frac{C}{2} \Leftrightarrow \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2} = \cot\frac{A}{2}.\cot\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cot\frac{B}{2} = \cot\frac{C}{2} \Leftrightarrow B = C.$$

Vậy tam giác đã cho là tam giác cân.

Ví dụ 38: Cho tam giác ABC có $\frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C} = \frac{a}{\sin B \sin C}$.

Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác vuông.

Giải

Áp dụng định lí sin thì hệ thức đã cho tương đương với :

$$\frac{\sin B}{\cos B} + \frac{\sin C}{\cos C} = \frac{\sin A}{\sin B \sin C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin B\cos C + \sin C\cos B}{\cos B\cos C} = \frac{\sin A}{\sin B\sin C} \Leftrightarrow \frac{\sin A}{\cos B\cos C} = \frac{\sin A}{\sin B\sin C}$$

$$\Leftrightarrow \cos B\cos C = \sin B\sin C \Leftrightarrow \cos(B + C) = 0$$

$$\Leftrightarrow B + C = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2} : \text{đpcm.}$$

Ví dụ 39: Tam giác ABC có $\frac{\sin A + \cos B}{\sin B + \cos A} = \tan A$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

Giải

Ta có $\frac{\sin A + \cos B}{\sin B + \cos A} = \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$

$$\Leftrightarrow \cos A\cos B - \sin A\sin B = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(A + B) = 0 \Leftrightarrow A + B = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Vì A , B là góc của một tam giác nên k = 0. Vậy tam giác đã cho là vuông ở A.

Ví dụ 40: Xét dạng tam giác ABC thỏa mãn điều kiện

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 1 = 0$$

Giải

Ta có $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A \cos B \cos C$.

nên đẳng thức đề bài tương đương với

$\cos A \cos B \cos C = 0 \Leftrightarrow \cos A = 0$ hay $\cos B = 0$, $\cos C = 0$.

Vậy tam giác đã cho là tam giác vuông.

Ví dụ 41: Tam giác ABC có tính chất gì , nếu $\begin{cases} \sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 0 \\ \cos A \cos B = \sin^2 \dfrac{C}{2} \end{cases}$

Giải

Từ hệ thức thứ hai ta được $\cos A \cos B = \dfrac{1}{2}(1 - \cos C)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)] = \dfrac{1}{2}[1 + \cos(A + B)]$

$\Leftrightarrow \cos(A - B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.

Thay vào hệ thức thứ nhất :

$2\sin 3A + \sin 3[\pi - 2A] = 0 \Leftrightarrow 2\sin 3A + \sin 6A = 0$

$\Leftrightarrow \sin 3A(1 + \cos 3A) = 0 \Leftrightarrow \sin 3A = 0$ hoặc $\cos 3A = -1$ nên $A = \dfrac{\pi}{3}$.

Vậy tam giác đã cho là tam giác đều.

Ví dụ 42: Trong tam giác ABC có

$$\cos A + \cos B + \cos C = \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}$$

Chứng minh rằng tam giác ABC đều.

Giải

Ta có A, B, C là 3 góc của tam giác ABC nên:

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \le 2\cos\frac{A+B}{2} = 2\sin\frac{C}{2}.$$

Dấu " = " xảy ra khi A = B.

Tương tự $\cos B + \cos C \le 2\sin\dfrac{A}{2}$; $\cos C + \cos A \le 2\sin\dfrac{B}{2}$.

nên $\cos A + \cos B + \cos C \le \sin\dfrac{A}{2} + \sin\dfrac{B}{2} + \sin\dfrac{C}{2}$

và dấu đẳng thức xảy ra khi A = B = C : đpcm.

Ví dụ 43: Cho tam giác ABC thỏa mãn

$\cos A + \cos B + \cos C = 2(\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A)$.

Chứng minh rằng tam giác ABC đều.

Giải

Ta có $1 \le \cos A + \cos B + \cos C \le \dfrac{3}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi A = B = C

và $xy + yz + zx \le x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow 3(xy + yz + zx) \le (x + y + z)^2$.

Đẳng thức xảy ra khi x = y = z. Do đó:

$3(\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A)$

$\le (\cos A + \cos B + \cos C).(\cos A + \cos B + \cos C) \le \frac{3}{2}(\cos A + \cos B + \cos C)$

$\Rightarrow 2(\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A) \le \cos A + \cos B + \cos C.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} \cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2} \\ 3(\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A = (\cos A + \cos B + \cos C)^2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ A = B = C : đpcm.

Ví dụ 44: Tam giác ABC có $\begin{cases} \cos B\cos C = \frac{1}{4} \\ a^2 = \frac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} \end{cases}$. Chứng minh tam giác ABC đều.

Giải

Từ điều kiện thứ hai $a^3 - a^2b - a^2c = a^3 - b^3 - c^3$

nên $(b + c)(b^2 - bc + c^2) = a^2(b + c)$

$b^2 - bc + c^2 = a^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = bc$

$\Leftrightarrow 2bc.\cos A = bc \Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{3}$.

Do đó, thế vào điều kiện thứ nhất

$\frac{1}{2}[\cos(B - C) + \cos(B + C)] = \frac{1}{4}$ nên

$\cos(B - C) - \cos A = \frac{1}{2}$ hay $\cos(B - C) = 1 \Rightarrow B = C.$

Vậy tam giác ABC đều.

Ví dụ 45: Xét dạng tam giác ABC thỏa mãn $b + c = \frac{a}{2} + h_a\sqrt{3}$.

Giải

Ta biến đổi

$$b + c = \frac{a}{2} + \frac{2S\sqrt{3}}{a} = \frac{a}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{a}\frac{abc}{4R} = \frac{a}{2} + \frac{bc\sqrt{3}}{2R}$$

$\Leftrightarrow 2\sin B + 2\sin C = \sin A + \sqrt{3}\sin B\sin C$

$\Leftrightarrow 2\sin B + 2\sin C = \sin B\cos C + \sin C\cos B + \sqrt{3}\sin B\sin C$

$\Leftrightarrow (2\sin B - \sin B\cos C + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\sin C) + (2\sin C - \sin C\cos B + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\sin C) = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin B[1 - (\frac{1}{2}\cos C + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin C)] + 2\sin C[1 - (\frac{1}{2}\cos B + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin B)] = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin B[1-\cos(C-\frac{\pi}{3})]+2\sin C[1-\cos(B-\frac{\pi}{3})]=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos\left(C-\frac{\pi}{3}\right)=1\\ \cos\left(B-\frac{\pi}{3}\right)=1\end{cases} \Leftrightarrow B=C=\frac{\pi}{3}$. Vậy ΔABC cân tại A.

Ví dụ 46: Chứng minh rằng tam giác ABC vuông hoặc cân khi và chỉ khi

$a\cos B - b\cos A = a\sin A - b\sin B$.

Giải

Hệ thức đề bài tương đương với

$\sin A\cos B - \sin B\cos A = \sin A\sin A - \sin B\sin B$

$\Leftrightarrow \sin(A-B)=\frac{1}{2}(1-\cos 2A)-\frac{1}{2}(1-\cos 2B)$

$\Leftrightarrow \sin(A-B)=\frac{1}{2}(\cos 2B-\cos 2A)$

$\Leftrightarrow \sin(A-B)=\sin(A+B)\sin(A-B)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin(A-B)=0\\ \sin(A+B)=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A=B\\ A+B=\pi/2\end{cases}$

$\Leftrightarrow$ tam giác ABC vuông hoặc cân đỉnh C.

Ví dụ 47: Chứng minh rằng ABC là tam giác tù khi và chỉ khi

$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C>1$.

Giải

Ta có $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C>1 \Leftrightarrow 1-2\cos A\cos B\cos C>1$

$\Leftrightarrow \cos A\cos B\cos C<0$.

Nếu cả ba số cosA, cosB, cosC đều âm tức là tam giác có 3 góc tù: vô lí. Do đó, phải có một trong ba số ấy âm và hai số còn lại dương. Vậy tam giác đã cho là tam giác tù.

Ví dụ 48: Các cạnh tam giác ABC thoả mãn điều kiện $a^4=b^4+c^4$.

Chứng tỏ rằng tam giác ABC nhọn và $2\sin^2 A=\tan B\tan C$.

Giải

Từ giả thiết , suy ra $\begin{cases}a>b\\ a>c\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A>B\\ A>C\end{cases}$ nên ta chỉ cần chứng minh A nhọn. Ta có

$b^4+c^4=b^2.b^2+c^2.c^2<a^2.b^2+a^2.c^2 \Rightarrow b^2+c^2>a^2 \Rightarrow$ đpcm.

và $2\sin^2 A=\tan B\tan C \Leftrightarrow 2a^2=\dfrac{bc}{\cos B\cos C}$

$\Leftrightarrow 2a^2\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=bc \Leftrightarrow a^4=b^4+c^4$: đúng

DẠNG 2: ỨNG DỤNG VÀO ĐẠI SỐ

Lượng giác hoá: đưa hàm số lượng giác vào bài toán **đại số.**

- Nếu $|x| \le 1$ thì đặt $x = \sin t$ hay $x = \cos t$
- Nếu $|x| \le r$, $r > 0$ thì đặt $x = r.\sin t$ hay $x = r.\cos t$
- Nếu $x^2 + y^2 = 1$ thì đặt $x = \sin t$ và $y = \cos t$
- Nếu $x^2 + y^2 = r^2$ thì đặt $x = r.\sin t$ và $y = r.\cos t$
- Nếu $|x| \ge 1$ thì đặt $x = \dfrac{1}{\sin t}$ hay $\dfrac{1}{\cos t}$
- Nếu $x \in \mathbf{R}$ thì đặt $x = \tan u$ hay $x = \cot u$
- Nếu có $a + b + c = abc$, $ab + bc + ca = 1$ thì đặt các đại lượng tang của các góc như các góc của tam giác,...

Ví dụ 1: Cho $x^2 + y^2 = 1$, $u^2 + v^2 = 1$. Chứng minh :

a) $|xu + yv| \le 1$ b) $|x(u - v) + y(u + v)| \le \sqrt{2}$

Giải

Vì $x^2 + y^2 = 1$ nên tồn tại góc a để $x = \cos a$, $y = \sin a$

Vì $u^2 + v^2 = 1$ nên tồn tại góc b để $u = \cos b$, $y = \sin b$

a) $|xu + yv| = |\cos a.\cos b + \sin a.\sin b| = |\cos(a - b)| \le 1$

b) $|x(u - v) + y(u + v)| = |\cos a(\cos b - \sin b) + \sin a(\cos b + \sin b)|$

$= |\cos(b - a) - \sin(b - a)| = |\sqrt{2}\cos(b - a + \dfrac{\pi}{4})| \le \sqrt{2}$

Ví dụ 2: Cho $ab \ne -1$; $bc \ne -1$; $ca \ne -1$. Chứng minh

$$\frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ca} = \frac{a-b}{1+ab}.\frac{b-c}{1+bc}.\frac{c-a}{1+ca}$$

Giải:

Đặt $a = \tan A$; $b = \tan B$; $c = \tan C$, thì đẳng thức đề bài thành

$$\frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B} + \frac{\tan B - \tan C}{1 + \tan B\tan C} + \frac{\tan C - \tan A}{1 + \tan C\tan A}$$

$$= \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}.\frac{\tan B - \tan C}{1 + \tan B\tan C}.\frac{\tan C - \tan A}{1 + \tan C\tan A}.$$

$\Leftrightarrow \tan(A - B) + \tan(B - C) + \tan(C - A) = \tan(A - B).\tan(B - C).\tan(C - A)$

Ta chứng minh:

$\alpha + \beta + \gamma = k\pi \Rightarrow \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha.\tan\beta.\tan\gamma$

Để ý rằng $(A - B) + (B - C) + (C - A) = 0 \Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 3: Cho $|b| \le |a|$. Chứng minh:

$$|a + b| + |a - b| = |a + \sqrt{a^2 - b^2}| + |a - \sqrt{a^2 - b^2}|$$

Giải:

Nếu $a = 0$ thì $b = 0$ nên đẳng thức đúng.

Nếu $a \neq 0$, đẳng thức tương đương:

$$|1 + \frac{b}{a}| + |1 - \frac{b}{a}| = |1 + \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}| + |1 - \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}| \quad (1)$$

Vì $|b| \leq |a|$ nên đặt $\frac{b}{a} = \cos t$, $0 \leq t \leq \pi$ thì (1) tương đương :

$|1 + \cos t| + |1 - \cos t| = |1 + \sin t| + |1 - \sin t|$

$\Leftrightarrow 1 + \cos t + 1 - \cos t = 1 + \sin t + 1 - \sin t \Leftrightarrow 2 = 2$: đúng

Ví dụ 4: Chứng minh với mọi $x, y \in \mathbf{R}$:

$$-\frac{1}{4} \leq \frac{(x^2 - y^2)(1 - x^2y^2)}{(1 + x^2)^2(1 + y^2)^2} \leq \frac{1}{4}$$

Giải:

Đặt $x = \tan\alpha$, $y = \tan\beta$ thì

$$T = \frac{(x^2 - y^2)(1 - x^2y^2)}{(1 + x^2)^2(1 + y^2)^2} = \frac{x^2(1 + y^2)^2 - y^2(1 + x^2)^2}{(1 + x^2)^2.(1 + y^2)^2}$$

$$= \frac{x^2}{(1 + x^2)^2} - \frac{y^2}{(1 + y^2)^2} = \frac{\tan^2\alpha}{(1 + \tan^2\alpha)^2} - \frac{\tan^2\beta}{(1 + \tan^2\beta)^2}$$

$$= \tan^2\alpha\left(\frac{1}{1 + \tan^2\alpha}\right)^2 - \tan^2\beta\left(\frac{1}{1 + \tan^2\beta}\right)^2$$

$$= \tan^2\alpha.\cos^4\alpha - \tan^2\beta.\cos^4\beta = \sin^2\alpha.\cos^2\alpha - \sin^2\beta.\cos^2\beta$$

$$= \frac{1}{4}(\sin^2 2\alpha - \sin^2 2\beta).$$

Do đó, $-\frac{1}{4} \leq -\frac{1}{4}\sin^2 2\beta \leq T \leq \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha \leq \frac{1}{4}$ (đpcm).

Ví dụ 5: Giải bất phương trình $\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x} \leq x$

Giải:

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$ nên đặt $x = \cos 2t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Bất phương trình trở thành

$$\sqrt{1 + \cos 2t} - \sqrt{1 - \cos 2t} \leq \cos 2t$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\,|\cos t| - \sqrt{2}\,|\sin t| \leq \cos^2 t - \sin^2 t$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\,(\cos t - \sin t) \leq (\cos t + \sin t)(\cos t - \sin t)$$

$$\Leftrightarrow \cos(t + \frac{\pi}{4})(\cos(t - \frac{\pi}{4}) - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \cos(t + \frac{\pi}{4}) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq 2t \leq \pi \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 0.$$

Nghiệm của bất phương trình là: $-1 \leq x \leq 0$.

Ví dụ 6: Giải phương trình $x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x\sqrt{2(1-x^2)}$

Giải:

Điều kiện : $|x| \le 1$ nên đặt $x = \cos u$, $u \in [0 , \pi]$.

Phương trình trở thành $\cos^3 u + \sin^3 u = \sqrt{2}\sin u \cos u$ (1)

Đặt $t = \sin u + \cos u$, $|t| \le \sqrt{2}$.

(1) $\Leftrightarrow (\sin u + \cos u)(1 - \sin u \cos u) = \sqrt{2}\sin u \cos u$

$\Leftrightarrow t\left(1 - \frac{t^2 - 1}{2}\right) = \sqrt{2}\frac{t^2-1}{2} \Leftrightarrow t^3 + \sqrt{2}t^2 - 3t - \sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow (t - \sqrt{2})(t^2 + 2\sqrt{2}t + 1) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2}$ hay $t = -\sqrt{2} \pm 1$

Chọn $t = \sqrt{2}$ thì có $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn $t = 1 - \sqrt{2}$ thì có $x = \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{\sqrt{2} - 1}}{2}$.

Vậy nghiệm: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{\sqrt{2} - 1}}{2}$.

Ví dụ 7: Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nằm trong [0 , 1] :

$$8x(1 - 2x^2)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1$$

Giải:

Đặt $x = \sin t$, với $0 < t < \frac{\pi}{2}$ thì phương trình trở thành

$8\sin t.\cos 2t(8\sin^4 t - 8\sin^2 t + 1) = 1$

$\Leftrightarrow 8\sin t.\cos 2t[8\sin^2 t(\sin^2 t - 1) + 1] = 1$

$\Leftrightarrow 8\sin t.\cos 2t(1 - 2\sin^2 2t) = 1$

$\Leftrightarrow 8\sin t\cos 2t.\cos 4t = 1 \Leftrightarrow 8\sin t.\cos 2t.\cos 4t.\cos t = \cos t$

$\Leftrightarrow \sin 8t = \cos t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{9}$ hay $t = \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7}$.

Từ điều kiện $0 < t < \frac{\pi}{2}$, suy ra có bốn nghiệm thích hợp là:

$$x = \sin\frac{\pi}{18} ; x = \sin\frac{5\pi}{18} ; x = \sin\frac{\pi}{14} \text{ và } x = \frac{5\pi}{14}.$$

Ví dụ 8: Giải phương trình $4x^3 - 3x = \frac{1}{2}$

Giải:

Ta có $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} = 4\cos^3\frac{\pi}{9} - 3\cos\frac{\pi}{9}$

nên $x = \cos\frac{\pi}{9}$ là 1 nghiệm của phương trình.

Tương tự $\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}=\cos\frac{5\pi}{3}=\cos\frac{7\pi}{3}$ nên $\cos 5\frac{\pi}{9}$ và $\cos 7\frac{\pi}{9}$ cũng là nghiệm. Vì 3 nghiệm đó phân biệt và phương trình cho bậc 3 nên phương trình có 3 nghiệm $x_1=\cos\frac{\pi}{9}, x_2=\cos\frac{5\pi}{9}, x_3=\cos\frac{7\pi}{9}$

Ví dụ 9: Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x+x^2y=y\\2y+y^2z=z\\2z+z^2x=x\end{cases}$

Giải:

Từ các phương trình của hệ phương trình đã cho suy ra x , y , $z \neq \pm 1$. Nên hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases}2x=(1-x^2)y\\2y=(1-y^2)z\\2z=(1-z^2)x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{2x}{1-x^2}\\z=\dfrac{2y}{1-y^2}\\x=\dfrac{2z}{1-z^2}\end{cases}$$

Đặt x = tant thì y = tan2t; z = tan4t; x = tan8t.

Ta được phương trình tan8t = tant $\Leftrightarrow t=\frac{k\pi}{7}$, k = 0 , 1 ,... , 6.

các nghiệm t này thích hợp nên suy ra các nghiệm x, y,z.

Ví dụ 10: Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3(1+3y)=8\\x(y^3-1)=6\end{cases}$

Giải:

Do $x \neq 0$ nên hệ: $\begin{cases}\dfrac{8}{x^3}-3y=1\\y^3-3\dfrac{2}{y}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t^3-3y=1\\y^3-3t=1\end{cases}\left(t=\frac{2}{x}\right)$

sủy ra $(t-y)(t^2+ty+y^2+3)=0$nên t = y do đó $y^3-3y=1$ (1)

Xét $-2 \leq y \leq 2$, đặt t = 2cosa

(1): $8\cos^3 a-6\cos a=1$ hay $\cos 3a=\frac{1}{2}$

Từ đó giải và chọn 3 nghiệm a là $\frac{\pi}{9};\frac{5\pi}{9};\frac{7\pi}{9}$

Vì (1) là phương trình bậc 3 nên có đúng 3 nghiệm y là

$2\cos\frac{\pi}{9};2\cos\frac{5\pi}{9};2\cos\frac{7\pi}{9}$ suy ra 3 nghiệm (x,y) cuả hệ.

Ví dụ 11: Tìm m để $f(x) = 4x^3 + mx$ thoả : $|f(x)| \le 1, \forall x \in [-1;1]$

Giải

Phần thuận: chọn $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$ thì được

$-1 \le 4 + m \le 1$ và $-1 \le \frac{1}{2} + \frac{m}{2} \le 1$

suy ra $m \le -3$ và $m \ge -3$ nên $m = -3$.

Đảo lại, khi $m = -3$. Vì $-1 \le x \le 1$ nên đặt $x = \cos t$

Ta có $|f(x)| = |4x^3 - 3x| = |4\cos^3 t - 3\cos t| = |\cos 3t| \le 1$: đúng.

Vậy $m = -3$.

Ví dụ 12: Cho x, y thay đổi thoả mãn $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất của $P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}$

Giải:

Vì $x^2 + y^2 = 1$ nên đặt $x = \cos t$, $y = \sin t$.

$P = \frac{2(\cos^2 t + 6\cos t.\sin t)}{2\cos t.\sin t + 2\cos^2 t} \Leftrightarrow (P-6).\sin t - (P+1)\cos t = 1 - 2P$

Điều kiện có nghiệm của phương trình

$(P-6)^2 + (P+1)^2 \ge (1-2P)^2 \Leftrightarrow P^2 + 3P - 18 \le 0 \Leftrightarrow -6 \le P \le 3$

Vậy min $P = -6$, max $P = 3$.

Ví dụ 13: Tìm giá trị lớn nhất – bé nhất của biểu thức $P = \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}$

Giải:

Đặt $x = \tan\alpha$, $y = \tan\beta$ với $\alpha, \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$P = \frac{(\tan\alpha + \tan\beta)(1 - \tan\alpha\tan\beta)}{(1 + \tan^2\alpha)(1 + \tan^2\beta)}$

$= \sin(\alpha + \beta).\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}\sin 2(\alpha + \beta)$ nên $-\frac{1}{2} \le P \le \frac{1}{2}$.

Vậy, max $P = \frac{1}{2}$ chẳng hạn $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

min $P = -\frac{1}{2}$ chẳng hạn $\alpha + \beta = -\frac{\pi}{4}$.

Ví dụ 14: Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất của $y = \frac{12x^4 + 8x^2 + 3}{(2x^2 + 1)^2}$

Giải:

Đặt $x\sqrt{2} = \tan t$, với $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Ta có

$$y = \frac{3\tan^4 t + 4\tan^2 t + 3}{(\tan^2 t + 1)^2} = 3 - \frac{1}{2}\sin^2 2t.$$

Vì $\sin^2 2t \le 1 \Leftrightarrow \frac{5}{2} \le y \le 3$.

Cho $t = 0$ thì $y = 3$, $t = \frac{\pi}{4}$ thì $y = \frac{5}{2}$.

Vậy $\max y = 3$ và $\min y = \frac{5}{2}$.

Ví dụ 15: Gọi x , y , z , t là nghiệm của hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z^2 + t^2 = 9 \\ xt + yz \ge 6 \end{cases}$.

Tìm x , y , z , t sao cho P = zx đạt giá trị lớn nhất.

Giải:

Đặt $x = 2\cos\alpha$, $y = 2\sin\alpha$; $z = 3\cos\beta$, $t = 3\sin\beta$, $\alpha , \beta \in [0 , 2\pi]$ thì

$xt + yz \ge 6 \Leftrightarrow 6(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) \ge 6$

$\Leftrightarrow 6\sin(\alpha + \beta) \ge 6 \Leftrightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Lúc đó, $P = xz = 6\cos\alpha\cos\beta = 3[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] = 3\cos(\alpha - \beta)$

đạt giá trị lớn nhất khi $\cos(\alpha - \beta) = 1 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 0$.

Suy ra $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = y = \sqrt{2}$; $z = t = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\max P = 3$, khi $x = y = \sqrt{2}$, $z = t = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

C. BÀI LUYỆN TẬP

* Chứng minh các đẳng thức về tam giác ABC:

1. a) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A.\cos B.\cos C$

b) $\sin A - \sin B + \sin C = 4\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$

HD: a) dùng công thức hạ bậc

2. a) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$

b) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A.\cos B.\cos C$

3. a) $\cot A.\cot B + \cot B.\cot C + \cot C.\cot A = 1$

c) $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}$

HD: dùng công thức cộng với góc $A + B = \pi - C$, $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$

4. a) $a = b.\cos C + c.\cos B$ b) $a = r(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2})$

c) $\tan A = \frac{a\sin B}{c - a\cos B}$ d) $\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$

5. a) $(a-b)\cot\frac{C}{2} + (b-c)\cot\frac{A}{2} + (c-a)\cot\frac{B}{2} = 0$

b) $\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} = \frac{1}{2}(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} + \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2})$

6. a) $l_a = \frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c}$ b) $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

HD: a) phân giác chia tam giác ABC và dùng công thức diện tích

7. a) $S = 2R^2\sin A\sin B\sin C$ b) $S = \frac{R}{2}(a\cos A + b\cos B + c\cos C)$

8. a) Nếu $2a + 2c = 3b$ thì $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{C}{2} = \frac{1}{5}$

b) Nếu $a^2 = b(b + c)$ thì $A = 2B$

HD: dùng định lí sin, cos và biến đổi lượng giác

9. a) Nếu $4A = 2B = C$ thì $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

b) Nếu $b = c$, $A = 20^0$ thì $a^3 + b^3 - 3ab^2 = 0$

10. Cho ΔABC vuông tại A và có tích 2 phân giác $BK.CJ = l^2$.

Chứng minh: a) $\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{l^2}{4a^2}$

b) $IB.IC = \frac{l^2}{2}$ (I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC)

11. Cho ΔABC có 2 trung tuyến $AM \perp BN$.
Chứng minh: $\cot C = 2(\cot A + \cot B)$

HD: Chứng minh $a^2 + b^2 = 5c^2$

12. Cho ΔABC có đường tròn nội tiếp tiếp xúc 3 cạnh tại A', B', C'. Tam giác A'B'C' cạnh a', b', c' và diện tích S'. Chứng minh:

a) $\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} = 2\sin\frac{C}{2}(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2})$

b) $\frac{S'}{S} = 2(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2})$

* Chứng minh các bất đẳng thức về tam giác ΔABC

13. a) $(a - b)(A - B) \geq 0$ d) $(a - b)(\cos A - \cos B) \leq 0$

14. a) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\ge\frac{3}{4}$ b) $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\le\frac{9}{4}$

c) $\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$ d) $\cos A\cos B\cos C\le\frac{1}{8}$

HD: biến đổi về tổng bình phương

15. a) $\tan A+\tan B\ge 2\cot\frac{C}{2}$ b) $\cot A+\cot B\ge 2\tan\frac{C}{2}$

16. a) $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\ge\sqrt{3}$ b) $\cot A+\cot B+\cot C\ge\sqrt{3}$

HD: dùng hệ thức về tan, cot và bất đẳng thức Côsi

17.a) $\sin^2 A+\sin^2 B\ge\frac{1}{2}\sin^2 C$ b) $1+\frac{x^2}{2}\ge\cos B+(\cos A+\cos C)x,\forall x$

c) $\cos^3 A+\cos^3 B+\cos^3 C\le\frac{9}{8}+\frac{1}{4}(\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C)$

HD: a) và b) dùng tam thức bậc hai

18. a) $\cos A\cos B\cos C\le\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

b) $\frac{1}{\sin^2 2A}+\frac{1}{\sin^2 2B}+\frac{1}{\sin^2 2C}\ge\frac{1}{2\cos A\cos B\cos C}$

c) $\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\ge\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}$

19. Với tam giác ABC nhọn

a) $\tan A+\tan B+\tan C\ge 3\sqrt{3}$ b) $\tan^6 A+\tan^6 B+\tan^6 C\ge 81$

c) $\sqrt{\tan A}+\sqrt{\tan B}+\sqrt{\tan C}\ge\sqrt{\cot\frac{A}{2}}+\sqrt{\cot\frac{B}{2}}+\sqrt{\cot\frac{C}{2}}$

20. a) Nếu $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}=1$ thì $\frac{3}{4}\le\tan\frac{C}{2}<1$

b) Nếu $0<A<B<C<90^0$ thì $2\cos 3C-4\cos 2C+1\ge 2\cos C$

c) Nếu $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C\ge -1$ thì $\sin A+\sin B+\sin C\le 1+\sqrt{2}$

21. Đặt $T=\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}$. Chứng minh:

a) Từ $(\cos A+\cos B)(1-\sin C)\ge 0$ suy ra $T<2$.

b) Với Δ không tù và $C\ge\frac{\pi}{3}$ thì $T\ge\frac{2\cos\frac{C}{2}+\sin C}{2\sin\frac{C}{2}+\cos C}\ge 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $T\ge 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

HD: c) biểu diễn theo góc: $A-\frac{\pi}{4};B-\frac{\pi}{4};C-\frac{\pi}{4}$

ABC

22. Tính các góc tam giác ABC cân biết có 1 góc thoả: $\tan x - \tan\frac{x}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

ĐS: 3 góc đều bằng 60^0

23. Tính các góc của Δ biết :

a) $(1+\cot B)(1+\cot C) = 2$ b) $\frac{1}{2} + \frac{b+c}{a}\sin\frac{A}{2} = 2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

24. Chứng minh :

a) Nếu $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d_a}$ thì $A = 120^0$.

b) Nếu $\sin 5A + \sin 5B + \sin 5C = 0$ thì có góc 36^0 hay 108^0

25. Tính các góc ΔABC nhọn biết $\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} = 6$

ĐS: 3 góc đều bằng 60^0

26. Tính các góc tam giác ABC biết : $\begin{cases} a^2 \geq b^2 + c^2 \\ \sin A + \sin B + \sin C = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$

ĐS: $A = 90^0$, $B = C = 45^0$

27. Tính các góc tam giác ABC biết :

$$\cos 2A + \sqrt{3}(\cos 2B + \cos 2C) + \frac{5}{2} = 0 .$$

28. Tính 3 cạnh tam giác ABC biết $\cot A = 2\cot B = 3\cot C$ và $R = 2$

29. Chứng minh không có tam giác mà các góc là nghiệm phương trình:

$$(4\cos x - 1)(14\sin^2 x - \sin 2x - 12) = 0$$

30. Cho tam giác ABC có 3 góc: A + C =2B và $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$

a) Tính 3 góc của ΔABC b) Tính 3 cạnh ΔABC biết chu vi là 100

31. Cho tam giác ABC tùy ý, tìm giá trị nhỏ nhất:

a) $T = 3\cos A + 2(\cos B + \cos C)$

b) $K = \frac{1}{\sin A + \sin B + \sin C}$

ĐS: a) $\frac{11}{3}$ b) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$

32. Cho tam giác ABC tùy ý, tìm giá trị lớn nhất:

a) $M = \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ b) $N = \frac{\tan^2 A.\tan^2 B.\tan^2 C}{\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C}$

ĐS: a) $\frac{1}{8}$ b) 3

33. Chứng minh tam giác ABC cân nếu:

a) $\frac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}=\frac{1}{2}(\tan A+\tan B)$ b) $a^2\sin 2B+b^2\sin 2A=c^2\cot\frac{C}{2}$

34. Xét dạng tam giác ABC biết :

a) $\frac{1+\cos B}{\sin B}=\frac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}}$ b) $\tan^2 A+\tan^2 B=2\tan^2\frac{A+B}{2}$

ĐS: tam giác ABC cân

35. Chứng minh tam giác ABC vuông nếu:

a) $\frac{b+c}{a}=\cos B+\cos C$ b) $\sin^2 A+\sin^2 B=\sqrt{\sin C}$ (A,B nhọn)

36. Xét dạng tam giác biết:

a) $3(\cos A+2\sin C)+4(\sin A+2\cos C)=15$

b) $S=\frac{1}{4}(a+b-c)(a-b+c)$ c) $\sin 2A+\sin 2B=4\sin A\sin B$

ĐS: tam giác ABC vuông

37. Chứng minh tam giác ABC đều nếu:

a) $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{8}$ b) $\cos A+\cos B-\cos(A+B)=\frac{3}{2}$

38. Chứng minh tam giác ABC đều nếu:

a) $S=\frac{\sqrt{3}}{36}(a+b+c)^2$ b) $S=\frac{2}{3}R^2(\sin^3 A+\sin^3 B+\sin^3 C)$

c) $\frac{a\cos A+b\cos B+c\cos C}{a\sin A+b\sin B+c\sin C}=\frac{2p}{9R}$ d) $\frac{a\cos A+b\cos B+c\cos C}{a\sin B+b\sin C+c\sin A}=\frac{2p}{9R}$

39. Xét dạng tam giác ABC nếu:

a) $\begin{cases}a^2=\frac{a^3-b^3-c^3}{a-b-c}\\4\sin B\sin C=3\end{cases}$ b) $\cot B+\cot C\ge 2(\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}-\sqrt{3})$

ĐS: tam giác ABC đều

40. Chứng minh ΔABC vuông hay cân nếu:

a) $\frac{\tan B}{\tan C}=\frac{\sin^2 B}{\sin^2 C}$ b) $a\tan B+b\tan A=(a+b)\cot\frac{C}{2}$

41. Chứng minh :

a) Nếu $a^3+b^3=c^3$ thì tam giác ABC nhọn.

b) Nếu $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C<2$ thì tam giác ABC tù.

c) Nếu $\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}=\sqrt{3}$ thì ΔABC có góc 60^0.

42. Xét dạng tam giác ABC :

a) $\begin{cases} \sin B = (\sqrt{2} - \cos C)\sin A \\ \sin C = (\sqrt{2} - \cos B)\sin A \end{cases}$

b) T = cotA + cotB + cotC bé nhất

ĐS: a) cân tại A b) đều

43. Xét dạng tam giác ABC biết:

a) $\sin A + \sin B + \sin C = 1 - \cos A + \cos B + \cos C$

b) $\frac{\cos A}{3} + \frac{\cos B}{4} + \frac{\cos C}{5} = \frac{5}{12}$

44. Xét dạng tam giác ABC biết:

a) $\cot^2 \frac{A}{2} + \cot^2 \frac{B}{2} + \cot^2 \frac{C}{2} = 9$

b) $\tan A + 2\tan C = \tan A.\tan^2 C$

ĐS: a) đều b) cân

45. Xét dạng tam giác ABC biết:

a) $\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} = \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}$ (nhọn)

b) $\frac{a+b+c}{4R} = \sin A\cos A + \sin B\cos B + \sin C\cos C$

ĐS: tam giác ABC đều

46. Tìm tham số để:

a) $f(x) = 2x^2 - m$ thoả : $|f(x)| \le 1, \forall x \in [-1;1]$

b) $f(x) = 8x^4 + bx^2 + c$ thỏa $|f(x)| \le 1, \forall x \in [-1;1]$.

ĐS: a) m =1, b) b = –8, c = 1

47. Tìm các tham số để:

a) $f(x) = 4x^3 + (a+3)x^2 + ax$ thoả $|f(x)| \le 1, \forall x \in [-1;1]$

b) $f(x) = 4x^3 + ax^2 + bx + c$ thoả $|f(x)| \le 1, \forall x \in [-1;1]$

48. Cho xy + yz + zx = 1 và xyz ≠ 0. Chứng minh

$$(x - \frac{1}{x})(y - \frac{1}{y}) + (y - \frac{1}{y})(z - \frac{1}{z}) + (z - \frac{1}{z})(x - \frac{1}{x}) = 4.$$

HD: Đặt x = tanα, y = tanβ; z = tanγ.

49. Cho xy + yz + zx = 1.

Chứng minh $x + y + z - 3xyz = x(y^2 + z^2) + y(z^2 + x^2) + z(x^2 + y^2)$.

HD: Đặt x = tanα, y = tanβ; z = tanγ.

50. Chứng minh với mọi x mà $|x| \le 1$ và

a) nếu $p > 1$ thì $(1-x)^p + (1+x)^p \le 2^p$.

b) nếu $0 < p < 1$ thì $(1-x)^p + (1+x)^p \ge 2^p$.

HD: Đặt $x = \cos 2a$.

51. Cho các số x , y , z thoả mãn $0 < x, y, z < 1$ và $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh $\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}$

HD: Đặt $x = \tan\alpha$, $y = \tan\beta$; $z = \tan\gamma$ với các góc thuộc $(0; \frac{\pi}{4})$

52. Chứng minh rằng từ bốn số cho trước luôn có thể chọn ra hai số x y sao cho: $0 \le \frac{x-y}{1+xy} \le 1$.

HD: Đặt $x = \tan\alpha$, $y = \tan\beta$;

53. Chứng minh bất đẳng thức:

a) $(1+x)^9 + (1+y)^9 + (1-x)^9 + (1-y)^9 \le 2^{10}, \forall x, y \in [-1;1]$

b) $\left|4(\sqrt{(1-x^2)^3} - x^3) + 3(x - \sqrt{1-x^2})\right| \le \sqrt{2}$

c) $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\,[\sqrt{(1+x)^3} + \sqrt{(1-x)^3}] < 2\sqrt{2} + \sqrt{2-2x^2}$

HD: a) Đặt $x = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$ b) và c) Đặt $x = \sin t$

54. Chứng minh:

a) Nếu $a^2 + b^2 = 1$ thì $-\sqrt{2} \le 4(a^3 - b^3) - 3(a-b) \le \sqrt{2}$

b) Nếu $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ thì :

$\left|x^2 - y^2 + 2\sqrt{3}xy - 2(1+2\sqrt{3})x + 2(2-\sqrt{3})y + 4\sqrt{3} - 3\right| \le 2$

55. Chứng minh:

a) Nếu $|a| \ge 1$ thì $-2 \le \frac{\sqrt{3} + \sqrt{a^2-1}}{a} \le 2$

b) Nếu $|x| \ge |y|$ thì : $|x+y| + |x-y| = \left|x + \sqrt{x^2-y^2}\right| + \left|x - \sqrt{x^2-y^2}\right|$

56. Giải phương trình $8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$

ĐS: $x_1 = \cos\frac{\pi}{7}, x_2 = \cos\frac{3\pi}{7}, x_3 = \cos\frac{5\pi}{7}$.

57. Giải phương trình: $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} = x(1 + 2\sqrt{1-x^2})$

.**HD:** Đặt $x = \sin t$

58. Giải phương trình: $(\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3}) = 2 + \sqrt{1-x^2}$

HD: Đặt x = cost

59. Giải bất phương trình: $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \le 2 - \frac{x^2}{4}$

HD: Đặt x = cos2t

60. Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x\sqrt{1-y^2} = \frac{1}{2} \\ y\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 16(x^5 + y^5) - 20(x^3 + y^3) + 5(x+y) = \sqrt{2} \end{cases}$

HD: a) Đặt x = sina, y = sinb b) Đặt x = sina, y = sina

61. Tìm m để phương trình:

a) $\sqrt{1-x^2} + (m-3)x = 6 + m$ có nghiệm

b) $x^5 + (3-x)^5 = m$ có nghiệm $x \in [0;3]$

62. Tìm giá trị lớn nhất , bé nhất của hàm số :

a) $y = \frac{1+x^6}{(1+x^2)^3}$

b) $y = x + \sqrt{1-x^2}$

ĐS: a) 1 và $\frac{1}{4}$ **HD:** b) Đặt x = sint

63. Cho a, b, c >0 và abc + a + c – b =0

Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{2}{a^2+1} - \frac{2}{b^2+1} + \frac{3}{c^2+1}$

ĐS: $\frac{10}{3}$

64. Cho a, b, c thay đổi thoả mãn $a^2 + 9b^2 + 9c^2 = 16$.

Tìm giá trị lớn nhất của Q = 9ab + 6bc + 9ca

HD: Từ giả thiết thì có $\left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{b}{\frac{4}{3}}\right)^2 + \left(\frac{c}{\frac{4}{3}}\right)^2 = 1$

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
ĐT (04) 9715013; (04) 7685236. Fax: (04) 9714899
***

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập PHẠM THỊ TRÂM
Biên tập nội dung
LAN HƯƠNG
Sửa bài
LÊ HOÀ
Chế bản
CÔNG TI ANPHA
Trình bày bìa
SƠN KỲ
Đối tác liên kết xuất bản
CÔNG TI ANPHA

SÁCH LIÊN KẾT

BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN ĐẠI SỐ 10 - Tập 2
Mã số: 1L-235ĐH2009
In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm tại Công ti TNHH MTV - In Song Nguyên
Số xuất bản: 792-2009/CXB/02-140/ĐHQGHN, ngày 27/08/2009
Quyết định xuất bản số: 235LK-TN/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2009.